

Der liegende Kreiskegel als Schattenwerfer zur Anzeige der babylonischen und italischen Stunden

Ortwin Feustel

In [1] wird u. a. eine horizontale Sonnenuhr beschrieben, die ausschließlich die babylonischen und inversen antiken italischen Stunden anzeigt. Die babylonischen Stunden zählen ab dem Sonnenaufgang, die inversen antiken italischen Stunden bis zum Sonnenuntergang. Als Schattenwerfer dient hierbei ein liegender Kreiskegel. Die „einzelnen“ Sonnenstrahlen tangieren den Kegel längs der Mantellinie, d. h. sie „formen“ in ihrer Gesamtheit eine Tangentialebene. Die Schnittgerade dieser Tangentialebene mit dem horizontalen Zifferblatt der Sonnenuhr verkörpert die Schattenlinie zur Zählung der babylonischen und inversen antiken italischen Stunden.

Es wird analysiert, warum der liegende Kreiskegel - mit einem der geografischen Breite entsprechenden halben Kegelöffnungswinkel - diese bemerkenswerte Indikation ermöglicht. Gesucht ist daher für den Winkel zwischen der positiven Ordinate des Zifferblatt-Koordinatensystems und der Schattenlinie die funktionelle Abhängigkeit vom Stundenwinkel der Sonne. Ausgehend vom senkrecht stehenden Kreiskegel werden zunächst anhand der Drehungsmatrix die implizite Gleichung des liegenden Kreiskegels und die Koordinaten eines Punktes auf dem Kegelmantel abgeleitet. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Differentialgeometrie die Gleichung der Tangentialebene des Kegels, die schließlich auch die Bestimmungsgleichung für den Schattenlinienwinkel liefert.

Die Konstruktionszeichnung des Zifferblatts einer solchen Kegelsonnenuhr und die Erläuterung ihrer Funktionsweise ergänzen die Ausführungen.

Charakteristika des Kreiskegels

Der senkrecht stehende Kegel

Liegt die Spitze des hyperbolischen Kegels im Ursprung des Koordinatensystems X, Y, Z , so gilt

$$(1) \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

Für $a = b$ erhält man einen geraden Kreiskegel der Höhe c

$$(2) \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

Ersetzen von a und c als Funktion des halben Kegelöffnungswinkels ϕ , siehe Abb. 1, führt zur Kegelmantellänge m in der impliziten Form

$$(3) K = X^2 + Y^2 - \tan^2 \phi Z^2 = 0.$$

Mit dem Polarwinkel der Kegelkreise t , dem halben Kegelöffnungswinkel ϕ und der Kegelmantellänge m (Variable längs der Mantellinie) sind die Koordinaten eines Punktes $P(X_p, Y_p, Z_p)$ des Kegelmantels

$$(4) X_p = m \sin \phi \sin t,$$

$$(5) Y_p = m \sin \phi \cos t,$$

$$(6) Z_p = m \cos \phi.$$

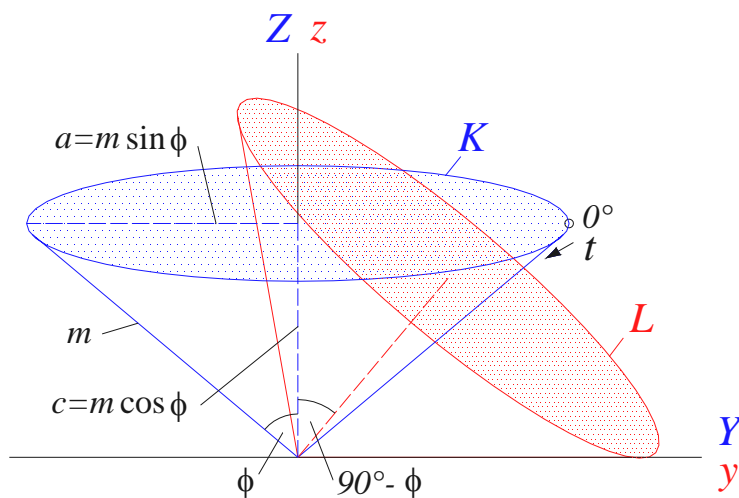


Abb. 1: Die Koordinaten des stehenden Kegels werden in die des liegenden Kegels transformiert, indem unter Beibehaltung der Ausrichtung des Koordinatensystems der stehende Kegel um den Koordinatenursprung in die erforderliche Lage gedreht wird. Hinweis: Die positive X_x -Achse steht senkrecht auf der Zeichnungsebene.

Transformierte Koordinaten des Kreiskegels

Der Kreiskegel soll so gekippt (gedreht) werden, daß der Kegelmantel die positive Y -Ordinate berührt, siehe Abb. 1. Die sich hierdurch ändernden Koordinaten findet man mit der Drehungsmatrix (Koeffizientenmatrix)

$$(7) D = \begin{pmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{pmatrix},$$

die die Richtungskosinusse zwischen den Achsen des ursprünglichen orthogonalen X, Y, Z -Koordinatensystems und dem neuen orthogonalen x, y, z -Koordinatensystem mit demselben Koordinatenursprung und derselben Skala beinhaltet. In Matrixschreibweise lautet die Koordinaten-Transformation mit Berücksichtigung des z, Z - bzw. y, Y -Drehungswinkels $(90^\circ - \phi)$

$$(8) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ - \phi) & \cos(\phi) \\ \cos(90^\circ) & \cos(180^\circ - \phi) & \cos(90^\circ - \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

so daß die Relationen

$$(9) x = X,$$

$$(10) y = \sin \phi Y + \cos \phi Z,$$

$$(11) z = -\cos \phi Y + \sin \phi Z$$

für die Abhängigkeit der neuen von den ursprüngliche Koordinaten stehen.

Den funktionellen Zusammenhang in der Richtung $x, y, z \Rightarrow X, Y, Z$ liefert

$$(12) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ - \phi) & \cos(180^\circ - \phi) \\ \cos(90^\circ) & \cos(\phi) & \cos(90^\circ - \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und damit die Relationen

$$(13) X = x,$$

$$(14) Y = \sin \phi y - \cos \phi z,$$

$$(15) Z = \cos \phi y + \sin \phi z.$$

Der liegende Kreiskegel

Mit dem Einsetzen von (13) bis (15) in (3) bekommt man

$$(16) L = x^2 - (\sin \phi y - \cos \phi z)^2 - \tan^2 \phi (\cos \phi y + \sin \phi z)^2 = 0$$

und nach Umformungen als Ergebnis für den liegenden Kreiskegel die implizite Gleichung

$$(17) L = \cos^2 \phi x^2 - \sin(2\phi) y z + \cos(2\phi) z^2 = 0.$$

Entsprechendes Einfügen von (4) bis (6) in (9) bis (11) liefert für die Koordinaten eines Punktes $P(x_P, y_P, z_P)$ des Kegelmantels

$$(18) x_P = m \sin \phi \sin t,$$

$$(19) y_P = m(1 - \sin^2 \phi(1 - \cos t)),$$

$$(20) z_P = \frac{m}{2} \sin(2\phi)(1 - \cos t).$$

Die folgende Tabelle gibt einige Koordinatenwerte in Abhängigkeit vom Parameter t wieder:

t	$0^\circ, 360^\circ$	$90^\circ, 270^\circ$	180°
$x(t)/m$	0	$\pm \sin \phi$	0
$x(t)/m$	1	$\cos^2 \phi$	$\cos(2\phi)$
$x(t)/m$	0	$0,5 \sin(2\phi)$	$\sin(2\phi)$

Tangentialebene an den Kegelmantel

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P(x_P, y_P, z_P)$ einer Fläche $L(x, y, z) = 0$ lautet [2]

$$(21) \frac{\partial L(x_P, y_P, z_P)}{\partial x} (x - x_P) + \frac{\partial L(x_P, y_P, z_P)}{\partial y} (y - y_P) + \frac{\partial L(x_P, y_P, z_P)}{\partial z} (z - z_P) = 0.$$

Die benötigten partiellen Ableitungen von (17) sind

$$(22) \frac{\partial L(x_P, y_P, z_P)}{\partial x} = 2 \cos^2 \phi x_P,$$

$$(23) \frac{\partial L(x_P, y_P, z_P)}{\partial y} = -\sin(2\phi) z_P,$$

$$(24) \frac{\partial L(x_P, y_P, z_P)}{\partial z} = -\sin(2\phi) y_P + 2 \cos(2\phi) z_P.$$

Mit dem Einsetzen von (22) bis (24) in (21) bekommt man für die Tangentialebene die folgende Bestimmungsgleichung

$$(25) 2 \cos^2 \phi x_P (x - x_P) - \sin(2\phi) z_P (y - y_P) + (2 \cos(2\phi) z_P - \sin(2\phi) y_P) (z - z_P) = 0,$$

die schließlich unter Berücksichtigung der Relationen (18) bis (20) die implizite Form

$$(26) E = x - \sin \phi \tan \frac{t}{2} y - \left(\frac{\sin \phi \tan \phi}{\sin t} + \frac{\cos \phi}{\tan t} \right) z = 0$$

erhält.

Schnittgerade von Tangentialebene und xy-Ebene

Für $z = 0$ in (26) folgt die Geradengleichung

$$(27) \quad x = \sin \phi \tan \frac{t}{2} y$$

bzw. der Winkel ζ zwischen positiver Ordinate und Schnittgerade, siehe Abb. 2, zu

$$(28) \quad \zeta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \arctan\left(\sin \phi \tan \frac{t}{2}\right).$$

Der Winkel ζ ist demnach für $\phi = \text{const.}$ eine Funktion des halben Winkels t , der auf den Querschnittkreisen senkrecht zur Kegelachse im Bereich $0^\circ \leq t \leq 360^\circ$ gezählt wird.

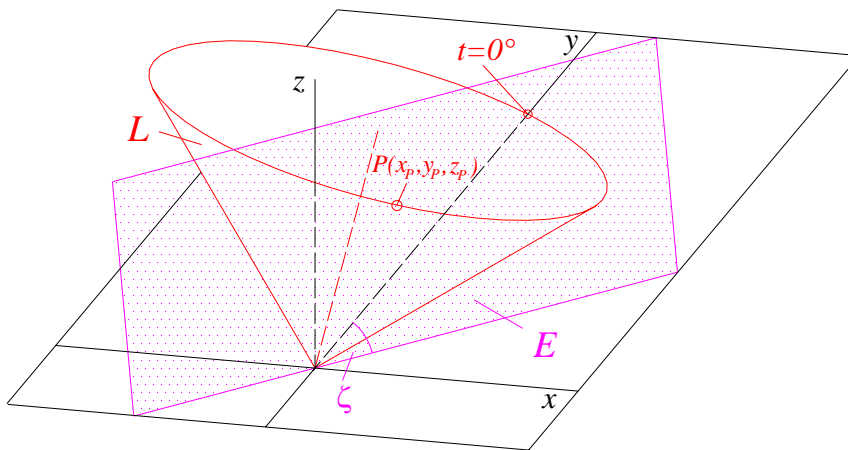


Abb. 2: Die Ebene E tangiert den liegenden Kreiskegel L im Punkte P . Die Schnittgerade von Tangentialebene und xy -Ebene schließt mit der Ordinate den Winkel ζ ein.

Der liegende Kreiskegel als Schattenwerfer

Zeigt die Kegelspitze exakt nach Süden und entspricht der halbe Kegelöffnungswinkel der geografischen Breite, so sind die Achse des liegenden Kegels parallel zur Erdachse und der Kegelgrundkreis parallel zum Äquator ausgerichtet. Das bedeutet, daß ein Winkelintervall $\Delta t = 15^\circ$ auf einem Kegelkreis einem Intervall des Sonnenstundenwinkels $\Delta \tau = 15^\circ = 1 h$ gleichkommt. In dem Moment, in dem die Sonne den Horizont passiert, beginnt die Besonnung der Sonnenuhr, d. h. die Sonnenstrahlen tangieren den Kegelmantel und werfen einen Schatten. Der Betrag des zugehörigen Stundenwinkels entspricht dem halben Tagbogen

$$(29) \quad \tau_0 = \arccos(\tan \phi \tan \delta),$$

er ist abhängig von der geografischen Breite ϕ und der Sonnendeklination δ . Zum Berechnen der babylonische Schattenlinienwinkel muß in (28) der Winkel t mit der folgenden Relation substituiert werden

$$(30) \quad t_{bab} = \tau_0 + \tau,$$

Man erhält somit

$$(31) \quad \zeta_{bab} = \arctan\left(\sin \phi \tan \frac{\tau_0 + \tau}{2}\right).$$

Im Augenblick des Sonnenaufgangs ist $\tau = -\tau_0$, d. h. bei $t_{bab} = 0^\circ$ startet die Anzeige (Zählung) der babylonischen Stunden mit $\zeta_{bab} = 0^\circ$. Die Stundenzahlen zur Beschriftung der Schattenlinien, siehe Abb. 3, sind mit (30)

$$(32) \quad T_{bab} = \frac{t}{15} = \frac{\tau_0 + \tau}{15}.$$

Dieses Prinzip des variablen Zählbeginns ist in gleicher Weise anwendbar für das variable Zählende: die Schattenlinien auf der dem Westen zugewandten Kegelseite dokumentieren die inversen antiken italischen Stunden. Die dann zutreffenden Relationen sind

$$(32) \quad t_{invita} = 360^\circ - (\tau_0 - \tau),$$

$$(33) \quad \zeta_{invita} = \arctan\left(\sin \phi \tan -\frac{360^\circ - (\tau_0 - \tau)}{2}\right),$$

$$(34) \quad T_{invita} = 24 - \frac{t_{invita}}{15} = 24 - \frac{360^\circ - (\tau_0 - \tau)}{15}.$$

Im Augenblick des Sonnenuntergangs ist $\tau = \tau_0$, d. h. bei $t_{invita} = 360^\circ$ endet die Anzeige (Zählung) der inversen antiken italischen Stunden mit $\zeta_{invita} = 0^\circ$. Die Beschriftung der Zeitskala bezieht sich folglich auf die Stundenanzahl, die noch bis zum Sonnenuntergang vergeht, siehe Abb. 3.

Hinweise: Für den Stundenwinkel τ gelten positive Werte westwärts, negative Werte ostwärts vom Ortsmeridian ($\tau = 0^\circ$ mittags). Da sich mit (31) und (33) die Hauptwerte der Arkusfunktion ergeben, ist stets auf die korrekte Quadrantenzuordnung zu achten. In (33) wurde das Argument der Tangensfunktion mit einem Minuszeichen versehen, um positive ζ_{invita} -Werte zu bekommen.

Die beiden folgenden Tabellen sollen anhand einiger markanter Werte die gegenseitigen Abhängigkeiten von Zeitangaben (babylonische Stunden T_{bab} , inverse antike italische Stunden T_{invita}) und Winkeln (Zentriwinkel t , Schattenlinienwinkel ζ) aufzeigen:

T_{bab}	0 h	4 h	6 h	8 h	12 h	16 h
t_{bab}	0°	60°	90°	120°	180°	240°
ζ_{bab}	0°	$\arctan \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}}$	$\arctan \sin \phi$	$\arctan(\sqrt{3} \sin \phi)$	90°	$180^\circ - \arctan(\sqrt{3} \sin \phi)$

T_{invita}	16 h	12 h	8 h	6 h	4 h	0 h
t_{invita}	120°	180°	240°	270°	300°	360°
ζ_{invita}	$180^\circ - \arctan(\sqrt{3} \sin \phi)$	90°	$\arctan(\sqrt{3} \sin \phi)$	$\arctan \sin \phi$	$\arctan \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}}$	0°

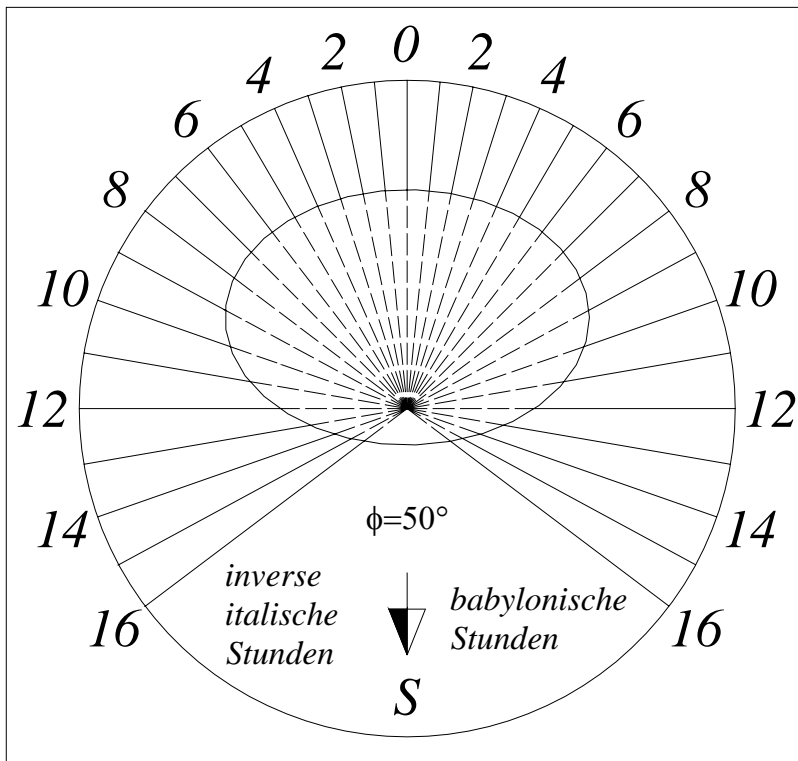


Abb. 3: Draufsicht auf das Zifferblatt und den Kreiskegel-Schattenwerfer einer horizontalen Sonnenuhr zur Anzeige der babylonischen und inversen antiken italischen Stunden. Die Schattenlinien wurden mit Relation (28) berechnet.

Rechenbeispiele

Im Folgenden wurden die Relationen (29) bis (32) verwendet; in den Tabellen ist $\Delta\tau = 30^\circ$.

Mit $\phi = 50^\circ$ und $\delta = 23,439^\circ$ ergibt sich $\tau_0 = 121,11^\circ$, d. h. die Lichttaglänge beträgt $\frac{2 \cdot 121,11}{15} = 16,15$ h.

τ in $^\circ$	-121,11	-91,11	-51,11	-31,11	-1,11	28,89	58,89	88,89	118,89
t_{bab} in $^\circ$	0	30	60	90	120	150	180	210	240
ζ_{bab} in $^\circ$	0	11,6	23,86	37,45	53	70,72	90	109,28	127
T_{bab} in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16

τ in $^\circ$	121,11	91,11	51,11	31,11	1,11	-28,89	-58,89	-88,89	-118,89
t_{invita} in $^\circ$	360	330	300	270	240	210	180	150	120
ζ_{invita} in $^\circ$	0	11,6	23,86	37,45	53	70,72	90	109,28	127
T_{invita} in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16

Mit $\phi = 50^\circ$ und $\delta = 0^\circ$ ist $\tau_0 = 90^\circ$, d. h. die Lichttaglänge beträgt $\frac{2 \cdot 90}{15} = 12$ h.

τ in $^\circ$	-90	-60	-30	0	30	60	90
t_{bab} in $^\circ$	0	30	60	90	120	150	180
ζ_{bab} in $^\circ$	0	11,6	23,86	37,45	53	70,72	90
T_{bab} in h	0	2	4	6	8	10	12

τ in $^\circ$	90	60	30	0	30	60	90
t_{invita} in $^\circ$	360	330	300	270	240	210	180
ζ_{invita} in $^\circ$	0	11,6	23,86	37,45	53	70,72	90
T_{invita} in h	0	2	4	6	8	10	12

Die Sonnendeklination beeinflusst also nur die Lichttaglänge, nicht jedoch die Anordnung der Stundenlinien, siehe auch Abb. 3.

Anhang

Ein Lösungsansatz für die Tangentialebene an den liegenden Kreiskegel ist auch auf Basis der Vektoranalysis [2] möglich.

Die Vektorgleichung

$$(35) \quad \vec{r} = \vec{r}(m,t) = x(m,t)\vec{i} + y(m,t)\vec{j} + z(m,t)\vec{k}$$

beschreibt eine Fläche in einem orthogonalen xyz -Koordinatensystem; hierbei sind m und t die krummlinigen Koordinaten auf der Fläche einer differenzierbaren Funktion $\vec{r}(m,t)$. Eine Tangentialebene wird von den Tangentenvektoren

$$(36) \quad \vec{r}_m = \frac{\partial \vec{r}}{\partial m} = \left(\frac{\partial x(m,t)}{\partial m}, \frac{\partial y(m,t)}{\partial m}, \frac{\partial z(m,t)}{\partial m} \right),$$

$$(37) \quad \vec{r}_t = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x(m,t)}{\partial t}, \frac{\partial y(m,t)}{\partial t}, \frac{\partial z(m,t)}{\partial t} \right)$$

der m - und t -Linien aufgespannt. Das Vektorprodukt $\vec{r}_m \times \vec{r}_t$ der beiden Vektoren ist der Normalenvektor \vec{N} ; er weist in die Richtung der Flächennormalen.

Für die Koordinaten eines Punktes $P(x_p(m,t), y_p(m,t), z_p(m,t))$ des Kegelmantels - siehe auch (18) bis (20) -

$$(38) \quad x_p(m,t) = m \sin \phi \sin t,$$

$$(39) \quad y_p(m,t) = m(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos t),$$

$$(40) \quad z_p(m,t) = m \sin \phi \cos \phi (1 - \cos t)$$

ergeben sich hinsichtlich (36) und (37) die folgenden partiellen Ableitungen

$$(41) \quad x_{pm} = \frac{\partial x_p(m,t)}{\partial m} = \sin \phi \sin t,$$

$$(42) \quad y_{pm} = \frac{\partial y_p(m,t)}{\partial m} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos t,$$

$$(43) \quad z_{Pm} = \frac{\partial z_p(m,t)}{\partial m} = \sin \phi \cos \phi (1 - \cos t),$$

$$(44) \quad x_{Pt} = \frac{\partial x_p(m,t)}{\partial t} = m \sin \phi \cos t,$$

$$(45) \quad y_{Pt} = \frac{\partial y_p(m,t)}{\partial t} = -m \sin^2 \phi \sin t,$$

$$(46) \quad z_{Pt} = \frac{\partial z_p(m,t)}{\partial t} = m \sin \phi \cos \phi \sin t.$$

Der Normalenvektor im Punkte $P(x_p(m,t), y_p(m,t), z_p(m,t))$ ergibt sich aus

$$(47) \quad \vec{N}_P = \vec{r}_{Pm} \times \vec{r}_{Pt} = \begin{pmatrix} |y_{Pm} & z_{Pm}| & |z_{Pm} & x_{Pm}| & |x_{Pm} & y_{Pm}| \\ |y_{Pt} & z_{Pt}| & |z_{Pt} & x_{Pt}| & |x_{Pt} & y_{Pt}| \end{pmatrix} \neq 0,$$

d. h. mit (41) bis (46) lauten dessen Komponenten

$$(48) \quad N_{Px} = \begin{vmatrix} y_{Pm} & z_{Pm} \\ y_{Pt} & z_{Pt} \end{vmatrix} = m \sin \phi \cos \phi \sin t,$$

$$(49) \quad N_{Py} = \begin{vmatrix} z_{Pm} & x_{Pm} \\ z_{Pt} & x_{Pt} \end{vmatrix} = m \sin^2 \phi (\cos t - 1),$$

$$(50) \quad N_{Pz} = \begin{vmatrix} x_{Pm} & y_{Pm} \\ x_{Pt} & y_{Pt} \end{vmatrix} = -m \sin \phi (1 + \cos^2 \phi (\cos t - 1)).$$

Mit dem Ortsvektor eines beliebigen Punkts des Kegelmantels

$$(51) \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

und dem Ortsvektor des Punkts $P(x(m,t), y(m,t), z(m,t))$

$$(51) \quad \vec{r}_p(m,t) = x_p(m,t)\vec{i} + y_p(m,t)\vec{j} + z_p(m,t)\vec{k}$$

definiert in Vektorschreibweise

$$(52) \quad (\vec{r} - \vec{r}_p(m,t)) \cdot \vec{N}_P = 0$$

die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt P geht und senkrecht auf der Normalen \vec{N}_P steht. Aus (52) folgt direkt

$$(53) \quad xN_{Px} + yN_{Py} + zN_{Pz} = x_pN_{Px} + y_pN_{Py} + z_pN_{Pz}$$

und schließlich mit dem Einfügen von (38) bis (40) und (48) bis (50) die Tangentialebene in der impliziten Form

$$(54) \quad x - \sin \phi \frac{1 - \cos t}{\sin t} y - \left(\frac{\sin \phi \tan \phi}{\sin t} + \frac{\cos \phi}{\tan t} \right) z = 0$$

bzw.

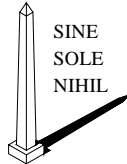
$$(55) \quad x - \sin \phi \tan \frac{t}{2} y - \left(\frac{\sin \phi \tan \phi}{\sin t} + \frac{\cos \phi}{\tan t} \right) z = 0.$$

Dieses Ergebnis ist natürlich identisch mit Relation (26).

Literatur

- [1] D. Savoie: Sundials - Design, Construction, and Use. Springer Berlin Heidelberg New York, 2009.
- [2] J. Dreszer (Hrsg.): Mathematik Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. Verlag Harri Deutsch; Zürich, Frankfurt/Main, Thun 1975.

Anschrift
des
Autors:



Dipl.-Ing. Ortwin Feustel
Heftricher Straße 1d,
D 61479 Glashütten,
☎ + Fax 0049-(0)6174-61080
e-mail: feustel_gnomonik@t-online.de