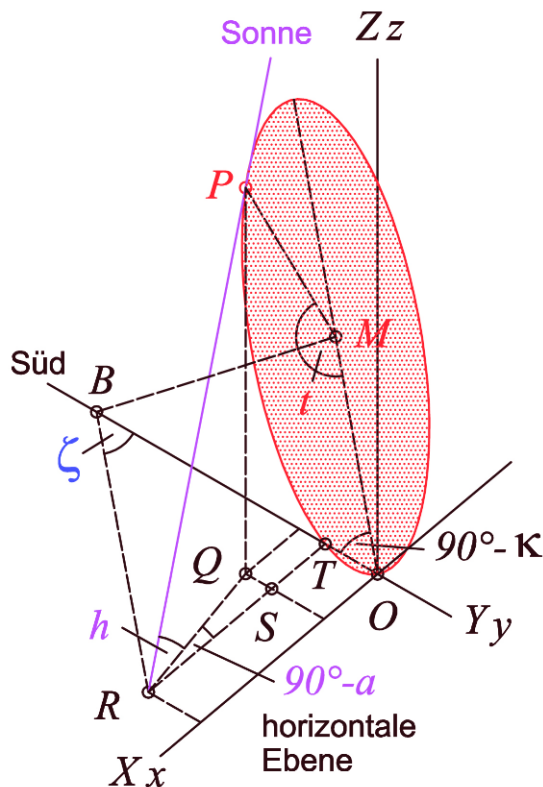


Der streifende Sonnenstrahl am gekippten Kreis

Ortwin Feustel

Problemstellung - siehe Abb. 1: Die Abszisse eines kartesischen Koordinatensystems tangiert im Koordinatenursprung einen in der XZ -Ebene befindlichen Kreis (Parameter: Radius $r = OM$ und Zentriwinkel t); der Kreis wurde aus seiner zunächst senkrechten Lage um den Winkel κ in Richtung der nach Süden weisenden negativen Ordinate gekippt. Ein Sonnenstrahl streife den Kreisrand im Punkt $P(x_P, y_P, z_P)$ und treffe im Punkt $R(x_R, y_R, 0)$ auf die horizontale Ebene. Die Koordinaten der übrigen Punkte seien $B(0, y_B, 0)$, $M(0, y_M, z_M)$, $O(0, 0, 0)$, $Q(x_P, y_P, 0)$, $S(x_P, y_R, 0)$, $T(0, y_R, 0)$. Die Koordinaten der Sonne sind



Symbole siehe Text.

Höhe h und Azimut a bzw. Stundenwinkel τ und Deklination δ ; der Standort des Kreises habe die geografische Breite ϕ . Gesucht ist für den Winkel ("horizontalen Auftreffpunktwinkel") ζ zwischen der negativen Ordinate und der Verbindungslinie zwischen den Punkten B (Schnittpunkt der Normalen durch das Kreiszentrum mit der Ordinate) und R (Auftrittspunkt des Sonnenstrahls) die funktionelle Abhängigkeit von den genannten Kenngrößen. Damit lässt sich die Frage beantworten, ob aus dem horizontalen Schattenwurf der Kreisscheibe einer äquatorialen Sonnenuhr¹ (für diese gilt $\kappa = \phi$!) unmittelbar auf die jeweils aktuellen Zeitintervalle hinsichtlich sowohl Sonnenaufgang als auch Sonnenuntergang geschlossen werden kann.

Abb. 1: Ein Sonnenstrahl streift einen gekippten Kreis im Punkt P ; Bedeutung der

Parameterdarstellung des gekippten Kreises

Aus der Parameterdarstellung des vertikalen Kreises in der XZ -Ebene, siehe Abb. 1,

- (1) $X = r \sin t$,
- (2) $Y = 0$,
- (3) $Z = r(1 - \cos t)$

erhält man mit der Drehungsmatrix

¹ In Betracht kommt beispielsweise die äquatoriale Sonnenuhr POLARIS der Firma Helios e.K., 65195 Wiesbaden, Begasweg 3
kreis_gekippt_blog.doc 06.10.2009

$$(4) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & -\sin \kappa \\ 0 & \sin \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung des um den Winkel κ in Richtung der negativen Ordinate gekippten Kreises zu

$$(5) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & -\sin \kappa \\ 0 & \sin \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin t \\ 0 \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin t \\ -r \sin \kappa(1 - \cos t) \\ r \cos \kappa(1 - \cos t) \end{pmatrix},$$

d. h. die Koordinaten des Punktes P im xyz -System sind

$$(6) x_P = r \sin t,$$

$$(7) y_P = -r \sin \kappa(1 - \cos t),$$

$$(8) z_P = -r \cos \kappa(1 - \cos t).$$

Relationen für Sonnenkoordinaten (Horizontsystem \leftrightarrow Äquatorsystem)

Deklination δ

Positive Werte: nördlich des Äquators.

Stundenwinkel τ

Positive Werte: westwärts vom Ortsmeridian aus.

Azimut a

Positive Werte: westwärts vom Ortsmeridian aus ($\tau = 0^\circ$ mittags).

$$(9) \sin a = \frac{\cos \delta \sin \tau}{\cos h},$$

$$(10) \cos a = \frac{\sin \phi \cos \delta \cos \tau - \cos \phi \sin \delta}{\cos h},$$

$$(11) \tan a = \frac{\sin \tau}{\sin \phi \cos \tau - \cos \phi \tan \delta}.$$

Höhe h

$$(12) \sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \tau.$$

Azimut a und Höhe h

Aus (9) und (10) folgt mit beidseitigem Dividieren durch $\tan h$

$$(13) \frac{\sin a}{\tan h} = \frac{\cos \delta \sin \tau}{\sin h},$$

$$(14) \frac{\cos a}{\tan h} = \frac{\sin \phi \cos \delta \cos \tau - \cos \phi \sin \delta}{\sin h}.$$

Halbe Tageslänge τ_0

$$(15) \cos \tau_0 = -\tan \phi \tan \delta.$$

Trigonometrie des Sonnenstrahls

Gegeben sind die Größen $x_P(t, \kappa), y_P(t, \kappa), z_P(t, \kappa), h(\phi, \delta, \tau), a(\phi, \delta, \tau)$, gesucht sind die Größen $x_R(t, \kappa, \phi, \delta, \tau), y_R(t, \kappa, \phi, \delta, \tau), \zeta(t, \kappa, \phi, \delta, \tau)$. Aus den rechtwinkligen Dreiecken von Abb. 1 liest man ab:

Dreieck QSR

$$(16) \tan a = \frac{x_R - x_P}{y_P - y_R},$$

$$(17) QR = \frac{y_P - y_R}{\cos a}.$$

Dreieck PQR

$$(18) \tan h = \frac{z_P}{QR}.$$

Dreieck BMO

$$(19) BO = \frac{r}{\sin \kappa}.$$

Dreieck BTR

$$(20) \tan \zeta = \frac{x_R}{BO + y_R}.$$

Weiterer Rechengang

Mit entsprechendem Verknüpfen der Relationen (16) bis (20) erhält man

$$(21) x_R = x_P + \frac{\sin a}{\tan h} z_P,$$

$$(22) y_R = y_P - \frac{\cos a}{\tan h} z_P,$$

$$(23) \zeta = \arctan \frac{x_R}{\frac{r}{\sin \kappa} + y_R}.$$

Einsetzen von (6), (8) und (13) in (21) bzw. von (7), (8) und (14) in (22) sowie Berücksichtigen von (15) führt zu

$$(24) x_R = r(\sin t + (1 - \cos t) \frac{\sin \tau}{\cos \tau - \cos \tau_0} \frac{\cos \kappa}{\cos \phi}),$$

$$(25) y_R = r(1 - \cos t) \left(\frac{\tan \phi \cos \tau - \tan \delta}{\cos \tau - \cos \tau_0} - \cos \kappa - \sin \kappa \right).$$

Zwischen dem Stundenwinkel τ , der halben Tageslänge τ_0 und dem Zenitwinkel t soll die folgende Relation bestehen

$$(26) \tau + \tau_0 = t.$$

Mit der Substitution (26) in (24) und (25) zeigen die Abb. 2 und 3 die grafische Darstellung von (23) in Abhängigkeit von t sowie den Parametern ϕ , δ und κ . Man erkennt, daß die Kurven $\zeta_2(t)$ übereinstimmen, d. h., unterschiedliche Werte der Sonnendeklination haben bei $\kappa = \phi$ keinen Einfluß auf den Kurvenverlauf. Es soll deshalb bei (24) und (25) vor dem Einfügen in (23) $\kappa = \phi$ gesetzt werden. Nach entsprechenden Umformungen ergibt sich

$$(27) \zeta = \arctan \left(\sin \phi \frac{\sin t (\cos \tau - \cos \tau_0) + (1 - \cos t) \sin \tau}{\cos \tau - \cos t \cos \tau_0} \right).$$

Unter Berücksichtigung von (26) folgt dann mit

$$(28) \sin t = \sin \tau \cos \tau_0 + \cos \tau \sin \tau_0,$$

$$(29) \cos t = \cos \tau \cos \tau_0 - \sin \tau \sin \tau_0$$

aus (27) die einfache Beziehung

$$(30) \quad \zeta = \arctan\left(\sin \phi \frac{1 - \cos t}{\sin t}\right) = \arctan\left(\sin \phi \tan \frac{t}{2}\right),$$

die in Abb. 4 grafisch dargestellt ist.

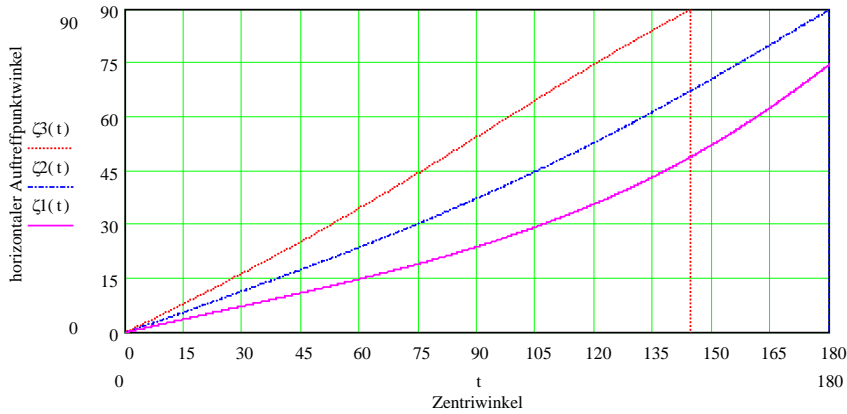


Abb. 2: Grafische Darstellung des horizontalen Auftreffpunktswinkels $\zeta = f(t)$ anhand der Relationen (23) bis (26) mit $\phi = 50^\circ$, $\delta = 23,439^\circ$, die Suffixe 1 bis 3 beziehen sich auf

$$\kappa_1 = 40^\circ, \kappa_2 = 50^\circ, \kappa_3 = 60^\circ.$$

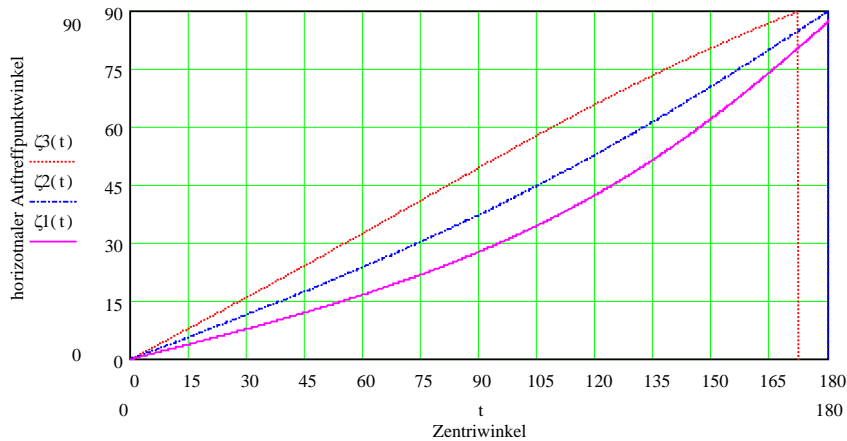


Abb. 3: Grafische Darstellung des horizontalen Auftreffpunktswinkels $\zeta = f(t)$ anhand der Relationen (23) bis (26) mit $\phi = 50^\circ$, $\delta = 5^\circ$, die Suffixe 1 bis 3 beziehen sich auf

$$\kappa_1 = 40^\circ, \kappa_2 = 50^\circ, \kappa_3 = 60^\circ.$$

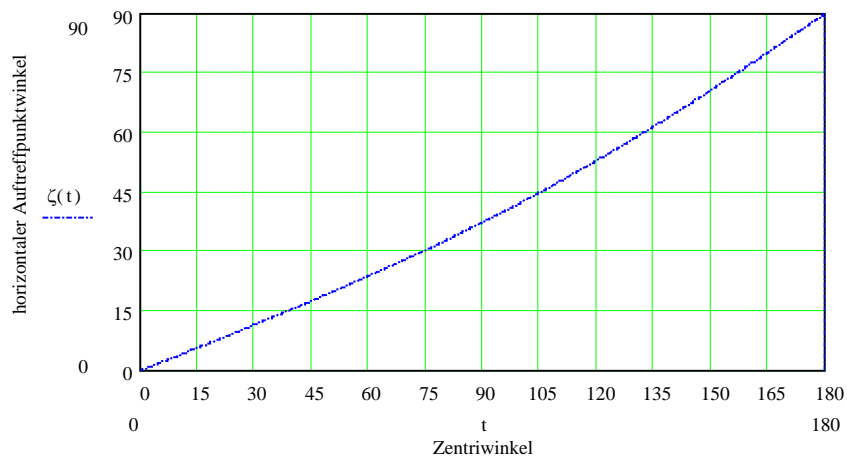


Abb. 4: Grafische Darstellung des horizontalen Auftreffpunktswinkels $\zeta = f(t)$ anhand der Relation (30) mit $\phi = 50^\circ$. Die Verläufe von $\zeta(t)$ sowie $\zeta_2(t)$ in den Abb. 2 und 3 sind identisch.

Resümee

In [1] wird u. a. eine horizontale Sonnenuhr beschrieben, die ausschließlich die babylonischen und inversen antiken italischen Stunden anzeigt. Die babylonischen Stunden zählen ab dem Sonnenaufgang, die inversen antiken italischen Stunden bis zum Sonnenuntergang. Als Schattenwerfer dient hierbei ein liegender Kreiskegel mit einem der geografischen Breite entsprechenden halben Kegelöffnungswinkel.

Mit der eingangs formulierten Problemstellung wurde die Geometrie des liegenden Kreiskegels auf die des Kegelgrundkreises bzw. der Kreisscheibe einer äquatorialen Sonnenuhr reduziert. So konnte auf rein trigonometrischem Wege analysiert werden, daß bei $\kappa = \phi$ unterschiedliche Werte der Sonnendeklination δ den horizontalen Auftreffpunktwinkel ζ , d. h. die Position des Auftreffpunkts des Sonnenstrahls auf der horizontalen Ebene, nicht beeinflussen. Dagegen bestimmt δ ganz wesentlich die halbe Lichttaglänge τ_0 . Aufgrund der Relation (26) ist daher die Größe von ζ ein Zählmaß für die jeweils seit Sonnenaufgang vergangene bzw. die noch bis Sonnenuntergang vergehende Zeitspanne.

Im Augenblick des Sonnenaufgangs ist $\tau = -\tau_0$, d. h. bei $t = 0^\circ$ startet die Zählung der babylonischen Stunden mit $\zeta = 0^\circ$. Im Augenblick des Sonnenuntergangs ist $\tau = \tau_0$, d. h., bei $t = 360^\circ$ endet die Zählung der inversen antiken italischen Stunden mit $\zeta = 0^\circ$.

Literatur

[1] D. Savoie: Sundials - Design, Construction, and Use. Springer Berlin Heidelberg New York, 2009.

Anschrift
des
Autors:



Dipl.-Ing. Ortwin Feustel
Heftricher Straße 1d,
D 61479 Glashütten,
☎ + Fax 0049-(0)6174-61080
e-mail: feustel_gnomonik@t-online.de