Verwendung einer Polaris als Kegelsonnenuhr zur Anzeige babylonischer und italienischer Stunden

1. Einleitung

In dem Beitrag wird gezeigt, dass die Polaris, eine äquatoriale Sonnenuhr der Firma Helios [6], außer der Tageszeit auch die babylonische und die inverse italienische Zeit anzeigen kann, wenn sie zusätzlich mit einem horizontalen Zifferblatt ausgerüstet wird (Abb1). Babylonische und italienische Zeiten geben die Zeitdauer an, die seit Sonnenaufgang bzw. Sonnenuntergang verstrichen ist. Mit inverser italienischer Zeit wird die Zeitdauer bis Sonnenuntergang bezeichnet.

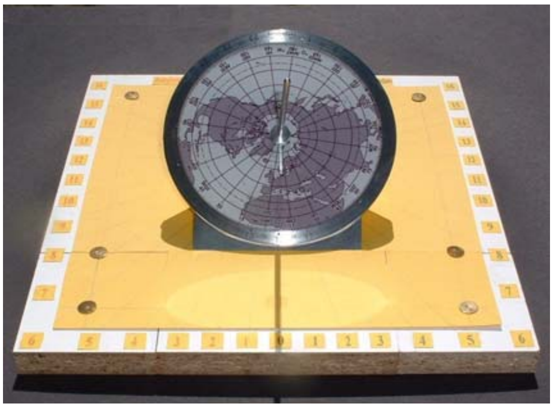


Abb.1 Polaris mit horizontalem Zifferblatt

Die im folgenden beschriebene Polaris ist mit einer Kegelsonnenuhr vergleichbar, die babylonische und inverse italienische Zeiten angibt (Abb2).
Konstruktion und mathematische Grundlagen einer Kegelsonnenuhr werden zunächst erläutert. Hierauf aufbauend wird auf das Modell der Polaris mit der zusätzlichen Zeitanzeige einer Kegelsonnenuhr eingegangen.

2. Konstruktion einer Kegelsonnenuhr

Abb2 Kegelsonnenuhr in Genk

Die in Abb. 2 gezeigte Kegelsonnenuhr steht im Sonnenuhrenpark der Stadt Genk in Belgien [5]. Das Besondere dieser Sonnenuhr ist der Kegelmantel, der als Schattenwerfer dient. Der Kegel liegt in Nord-Südrichtung auf einem horizontalen Zifferblatt; sein Öffnungswinkel ist gleich der doppelten geographischen Breite des Aufstellungsortes. Die Zeitlinien des Zifferblattes, die mit der Formel für Horizontaluhren bestimmt werden können (siehe Punkt 3), sind mit der doppelten Stundenzahl einer horizontalen Sonnenuhr bezeichnet: anstelle 1 Uhr steht 2 Uhr, anstelle 2 Uhr steht 4 Uhr, usw. [3]. Die babylonischen Stunden werden auf der nach Osten ausgerichteten Seite und die inversen italienischen Stunden werden auf der nach Westen ausgerichteten Seite angezeigt.

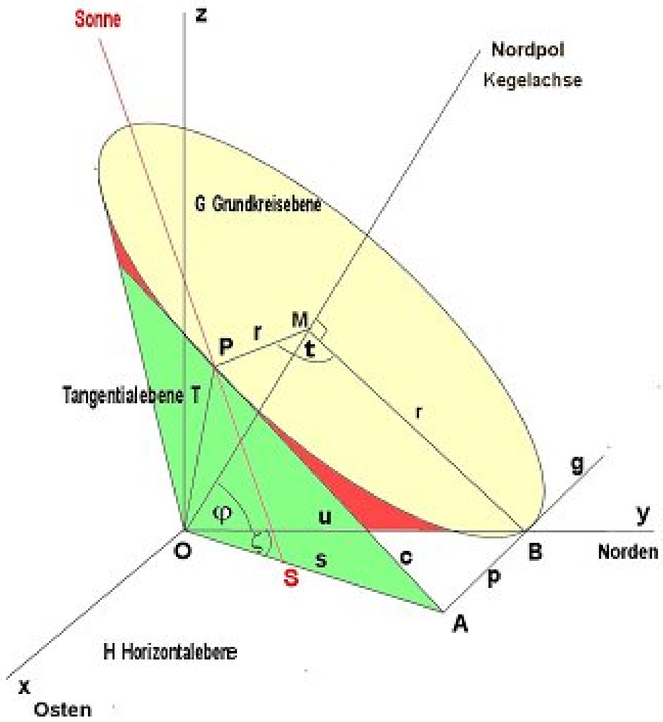
3. Mathematische Grundlagen der Kegelsonnenuhr

Die Schattenlinie einer Kegelsonnenuhr wird durch die Sonnenstrahlen gebildet, die eine Mantellinie des Kegels tangieren. Diese Linie, die eine Zeitbestimmung ermöglicht, ist die Schnittgerade der an der Mantellinie liegenden Tangentialebene mit der Horizontalebene [1],[2].

Gesucht wird der Zusammenhang $\zeta = f(t)$ zwischen dem Richtungswinkel ζ der Schattenlinie und der babylonischen Zeit t.
Für die Zeit *t* gilt

$$t = \tau - \tau_0 \qquad (1)$$

mit τ = Wahre Ortszeit (WOZ) und τ_0 = Zeitpunkt (WOZ) des Sonnenaufganges



Wir betrachten den Punkt P auf dem Grundkreis des Kegels (Abb.3), der bei Sonnenaufgang in der Horizontalebene auf der y-Achse in B liegt, und der sich mit der Sonne pro Stunde um 15 Grad auf dem Grundkreis bewegt [5]. Der Drehwinkel des Punktes P um die Kegelachse ist gleich der babylonischen Zeit t.
Die in Abb. 3 gekennzeichneten Ebenen T, H und G schneiden sich im Punkt A, dem Schnittpunkt der Ebenenschnitte s, c und g. Die Schnittgerade s ist die Schattenlinie der Mantellinie OP, und die Schnittgeraden c und g sind Tangenten an den Punkten P und B des Grundkreises.

. Abb.3 Geometrie der Kegelsonnenuhr

Die Lage des Schattenpunktes S von P auf der Linie s variiert mit dem Datum, d. h. unter anderem mit der Sonnendeklination δ. Der Zeitpunkt τ, zu dem die Bedingung

$$t_k = \tau - \tau_0 = konstant \qquad (2)$$

erfüllt ist, z.B. $t=5$, wenn fünf Stunden nach Sonnenaufgang verstrichen sind, ändert sich, wie die Zeit τ_0, täglich. Wenn die Kegelsonnenuhr die bestimmte Zeit t_k anzeigt, liegt der Schatten S von P auf der entsprechenden Zeitlinie s_k. Sonnenhöhe *h* und Sonnenazimut α ändern sich in Abhängigkeit von der Zeit τ und der Sonnendeklination δ [4]; das bedeutet, die Lage des Schattenpunktes S ändert sich ebenfalls mit verändertem τ und δ. Wie festgestellt, liegt S zur Zeit t_k immer auf der Zeitlinie s_k, aber an anderer Stelle als am Vortage.

Aus Abb 4. ist ersichtlich, dass

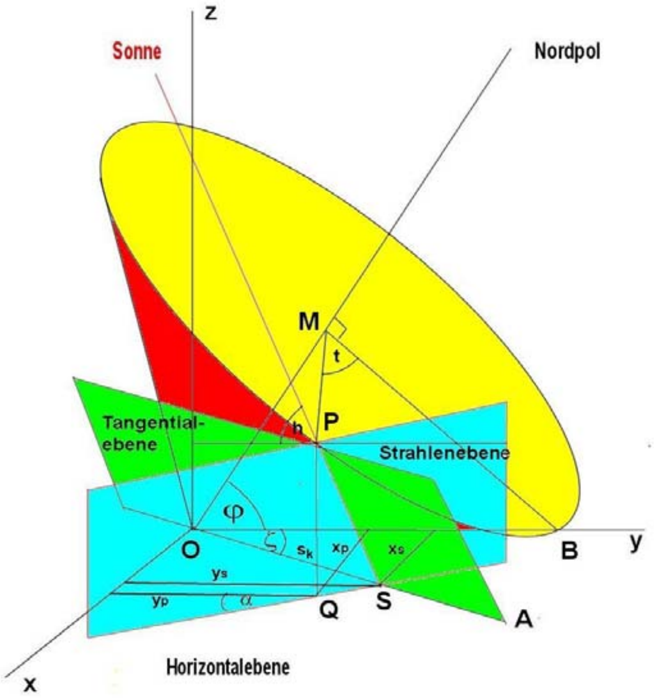
$$\tan(90 - \zeta) = m \qquad (3)$$

mit m = Anstieg der Zeitlinie s_k,

bzw. dass

$$\tan(90 - \zeta) = y_S / x_S \qquad (4)$$

mit y_S , x_S = Koordinaten des Schattenpunktes S von P ist.



Die gesuchte Beziehung $\zeta = f(t)$ kann durch Bestimmung des Anstieges m der Schnittgeraden s von Tangential- und Horizontalebene als Funktion von t mittels der Differentialgeometrie bzw. durch Bestimmung von y_S/x_S in Abhängigkeit von t mit Hilfe der Trigonometrie ermittelt werden [1],[2].

Die Beziehung $\zeta = f(t)$ lässt sich aus den Dreiecken OAB und MAB auch geometrisch ableiten (Abb. 3 und 5).

Abb. 4 Zeitlinie s (OA) und Lage des Schattenpunktes S von P. Die Strahlenebene steht senkrecht auf der Horizontalebene in Richtung des Sonnenazimuts α.

Im rechtwinkligen Dreieck AOB der Horizontalebene H ist

$$p = u \tan(\zeta) \qquad (5)$$

mit u = Länge der Mantellinie

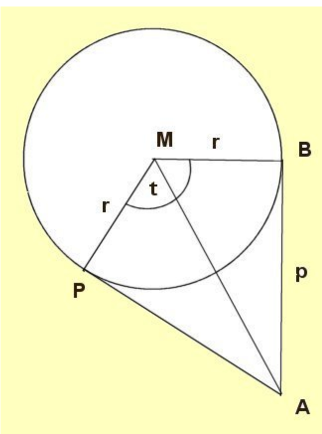


Abb.5 Kegelgrundebene

Die rechtwinkligen Dreiecke MPA und MBA, die in der Kegelgrundfläche G liegen, sind deckungsgleich. Die gemeinsame Seite MA halbiert den Winkel t (Abb.5). Somit gilt

$$p = r \tan(t/2) \qquad (6)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OMB (Abb.3) ergibt sich

$$r = u \sin(\varphi) \qquad (7)$$

mit φ = geographische Breite des Aufstellungsortes.

Durch Einsetzen von *r* aus Gleichung (7), und Gleichsetzen der Gleichungen (5) und (6) erhält man die gesuchte Beziehung

$$\tan(\zeta) = \sin(\varphi)\tan(t/2) \qquad (8)$$

Die Formel zur Bestimmung der Zeitlinien horizontaler Sonnenuhren lautet [4]

$$\tan(\zeta) = \sin(\varphi)\tan(\tau_k) \qquad (9)$$

Der Vergleich der Gleichungen (8 und (9) ergibt

$$\tau_k = t/2 \ . \qquad (10)$$

Gleichung (10) zeigt, die Zeitlinien der horizontalen Sonnenuhr und der Kegelsonnenuhr unterscheiden sich, wie unter Punkt 2 angegeben, um den Faktor 2.
Zu beachten ist, dass τ_k (10) und τ (1) unterschiedliche Bedeutung haben:
τ_k dient zur Konstruktion von Zeitlinien und τ gibt die Tageszeit WOZ an.

Die Gleichung (8) kann entsprechend für die italienischen Stunden hergeleitet werden.

4. Polaris als Kegelsonnenuhr

Die Abb.6 zeigt ein Modell der Polaris, die mit einem horizontalen Zifferblatt und einem Kegelmantel zu einer Kegelsonnenuhr aufgerüstet ist. Auf den Kegelmantel kann, wie noch erläutert wird, verzichtet werden.
Der Zeitring der Polaris liegt auf dem horizontalen Zifferblatt, so dass der Kegelmantel die Mittagslinie des Zifferblattes berührt. Die standardmäßig vorhandene Stütze der Polaris liegt verdeckt in einer Aussparung der Trägerplatte.

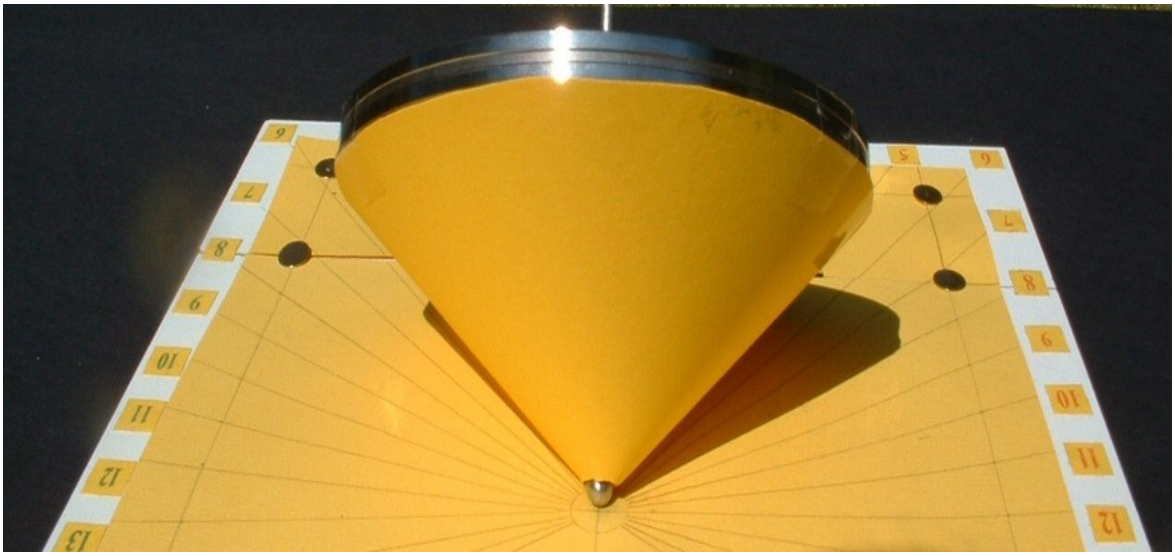


Abb.6 Modell der Polaris als Kegelsonnenuhr mit horizontalem Zifferblatt und Kegelmantel, Standort B = 50,7^0 N, L = 7,0^0 O; Aufnahme 18. August 2009, 14^{30} (MESZ), 12^{55} (WOZ); babylonische Zeit $t_b = 8^h$; inverse italienische Zeit $t_i = 6^h\ 11^m$;
Sonnenaufgang $\tau_0 = 4^{55}$ (WOZ); Sonnenuntergang $\tau_u = 19^{05}$ (WOZ)

Die Modelluhr zeigt die babylonische Zeit

$$t_b = \tau - \tau_0 \qquad (1)$$

und die inverse italienische Zeit

$$t_i = 24 - (\tau + \tau_0) \qquad (11)$$

an. Da die Polaris auch die Wahre Ortszeit angibt, kann aus den Gleichungen (1) und (11) der Sonnenaufgang τ_0 und damit der Sonnenuntergang

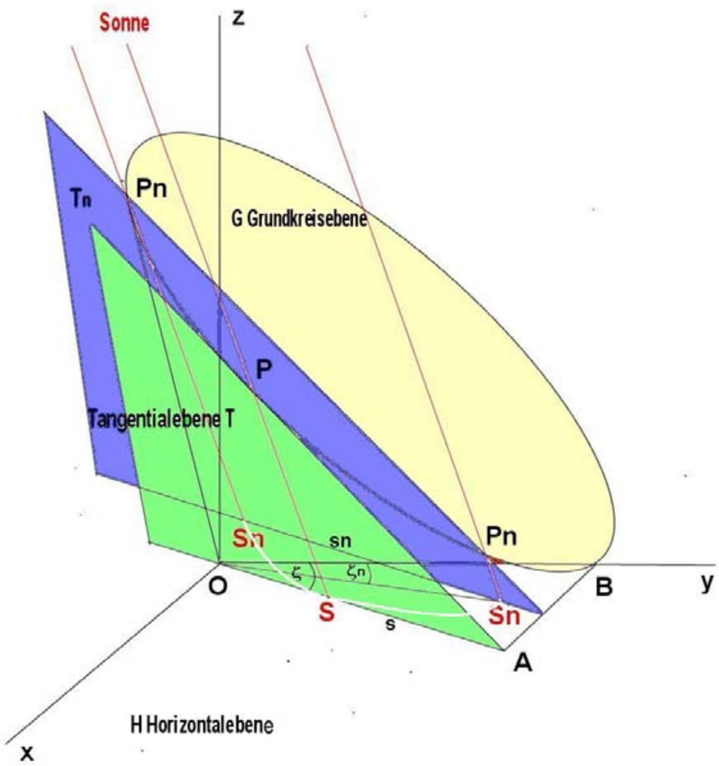
$$\tau_u = 24 - \tau_0 \qquad (12)$$

berechnet werden. Mit den gemessenen Werten t_b und t_i ist der Sonnenaufgang ebenfalls bestimmbar

$$\tau_0 = [\,24 - (\,t_b + t_i)]\,/\,2 \qquad (13)$$

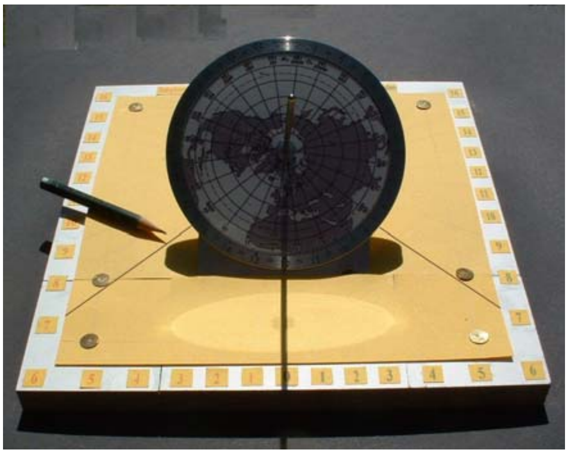
Gleichung (13) ergibt sich durch Addition der Gleichungen (1) und (11).

Wie bereits erwähnt, kann auf den Kegelmantel der Kegelsonnenuhr verzichtet werden. Dann entfällt jedoch die gut erkennbare gerade Schattenlinie und es gilt, den Schatten S des Punktes P (Abb.3) im Schattenbild des kreisförmigen Randes der Polaris. zu lokalisieren.



Das Schattenbild des Kegelkreises wird durch die aktuelle Zeitlinie s begrenzt, wie aus Abb.6 ersichtlich ist. Bei einem Kreisring ohne Kegelmantel, wie dem Rand der Polaris, verläuft die Zeitlinie s ebenfalls durch die Punkte O und S und bildet die Tangente im gesuchten Punkt S an das Schattenbild des Kreisringes (Abb.7). Das durch ein paralleles Strahlen-Bündel in der Horizontalebene erzeugte Schattenbild des Kreisringes ist eine Ellipse (Abb.1)

Abb.7 Die Schattenpunkte S und S_n des kreisförmigen Randes der Polaris Sonnenuhr liegen auf einer Ellipse. Die Strecke OA bildet die Tangente an die Ellipse im Punkt S und markiert die augenblickliche Lage der Zeitlinie s.



Die in Abb.8 dargestellte Polaris mit horizontalem Zifferblatt und ohne Kegelmantel wurde am 24. August 2009 um 12^{00} (WOZ), 13^{34} (MESZ), aufgenommen. Wenn die Sonne kulminiert 12^{00} (WOZ) sind babylonische und inverse italienische Zeit gleich groß

$$t_b = t_i \qquad (14)$$

Die Ablesegenauigkeit beträgt schätzungsweise +/- 10 Minuten.

Abb.8 Modell der Polaris als Kegelsonnenuhr mit horizontalem Zifferblatt und ohne Kegelmantel, 12^{00} (WOZ), babylonische Zeit = inverse italienische Zeit = $6^{h}\,55^{m}$ (siehe Bleistiftspitze)

Die Kegelsonnenuhr ist eine besonders bemerkungswerte Sonnenuhr. Sie wurde von Javier Moreno Bores (Spanien) 1997 erfunden [1]. Das beschriebene Modell zeigt, dass die Polaris mit einfachem Zusatz auch als Kegelsonnenuhr verwendet werden kann, um babylonische und italienische Stunden anzuzeigen.

Literatur und Internetadressen

[1] J. M. Bores, A new family of sundials with conical gnomon, NASS Compendium Vol. 5 Nr. 2 June 1998

[2] O. Feustel: Der liegende Kreiskegel als Schattenwerfer und Der streifende Sonnenstrahl am gekippten Kreis, Manuskripte

[3] D. Savoie: Sundials- Design, Construction, and Use, Springer Berlin Heidelberg New York, 2009

[4] A. Zenkert: Faszination Sonnenuhr, Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2005

[5] F. Maes: Sundial Park Genk, www.fransmaes.nl/genk/welcome-e.htm

[6] C. Heller: Firma Helios Wiesbaden, www.helios-sonnenuhren.de

Danksagung

Für die hilfreichen Gespräche über die Theorie der Kegelsonnenuhr und für die Anregungen zur Formulierung des Sachverhaltes danke ich Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Helfrich, Universität Bonn, sowie Herrn Dipl. Ing. Ortwin Feustel und Herrn Dr. Fritz Ostermann, mit denen mich die Freude an der Beschäftigung mit Sonnenuhren verbindet. Vielen Dank spreche ich auch Herrn Dr. Frans Maes für das zur Verfügung gestellte Bild der Kegelsonnenuhr im Sonnenuhrenpark der Stadt Genk (Abb.2) aus.

Dipl. Ing. Helmut Jansen
Jansen-Alfter@t-online.de