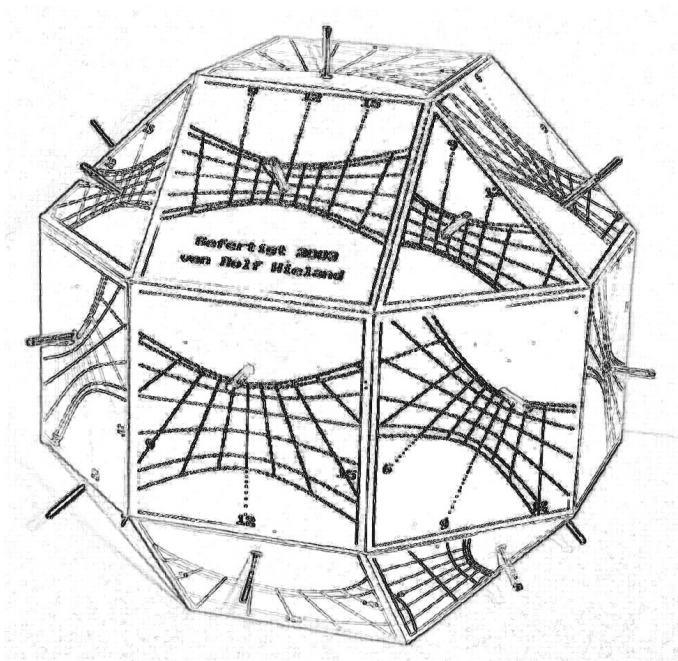


Ebene
Polos-Uhren
mit dem PC



Von Rolf Wieland in Satteldorf

2011

Inhaltsverzeichnis

1.	Mathematische Hilfsmittel	3
1.1	Trigonometrie	4
1.2	Kugelgeometrie	5
1.3	Vektorrechnung	6
1.4	Koordinatentransformationen	7
1.5	Koordinatensysteme	12
1.6	Definitionslücken	12
1.7	Rundungsungenauigkeiten	14
1.8	Nichtumkehrbarkeit der Funktionen	14
1.9	Berechnung von Zeitgleichung und Deklination	15
1.10	Das julianische Datum	17
1.11	Längenausgleich	18
2.	Charakteristische Winkel	20
3.	Stundengeraden	22
3.1	Stundenwinkel bei der Horizontaluhr	23
3.2	Stundenwinkel abweichender und geneigter Uhren	23
3.3	Orientierungen	25
3.4	Formeln für die charakteristischen Winkel	26
3.5	Zusammenfassung	27
3.6	Zeichenhilfen	29
3.7	Deklinationenlinien	34
4.	Beleuchtungsdauer	36
4.1	Einleitung	36
4.2	Horizontebene	38
4.3	Zifferblattebene	43
4.4	Schnittstellen	46
4.5	Durchschnitt	50
4.6	Extremale Beleuchtungsdauer	53
4.7	Refraktion	56

5.	Gleichungen der Deklinationslinien	58
5.1	Kegelschnitte	58
5.2	Herleitungen	60
5.3	Polargleichungen	63

1. Mathematische Hilfsmittel

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Aufgabe, an jedem beliebigen Ort der Erde auf einer beliebig orientierten Ebene das Zifferblatt einer Sonnenuhr mit dem Computer zu berechnen und zu verzeichnen.

Um den Betrachter nicht zu verwirren, sollte das Zifferblatt nur diejenigen Stundengeraden aufweisen, wenn die Uhr auch tatsächlich beschienen wird.

Die Aufgabe ist recht kompliziert, da je nach Vorzeichen und Quadrant der vielen verschiedenen Eingangsparameter wie geographische Breite und Länge, Neigung und Abweichung der Zifferblattebene, Deklination und Stundenwinkel der Sonne, Horizonhöhe im Osten und Westen, Ortszeit oder Zonenzeit usw. verschiedene Situationen auftreten.

Besonders sei darauf hingewiesen, dass für die eindeutige Bestimmung eines Winkels zwischen 0° und 360° zwei trigonometrische Funktionen nötig sind.

Die Deklinationskurven können punktweise oder mit Hilfe der Mittelpunktsgleichungen der Kegelschnitte gezeichnet werden.

Trigonometrie

Zur Behandlung der Aufgabe ist keine höhere Mathematik erforderlich. Man kommt mit der ebenen Trigonometrie aus, um die in der geometrischen Konstruktion auftretenden Dreiecke zu berechnen. Abb. 4 zeigt als Beispiel die Berechnung des Winkels ψ zwischen dem Schattenzeiger und seiner orthogonalen Projektion in die Zifferblattebene, der Substilare, bei einer um den Winkel d von der Südrichtung abweichenden Vertikaluhr. Weist der Zeiger zum Südpol, dann soll der Winkel ψ negativ sein.

$$\sin(-\psi) = -\sin \psi = \cos \varphi \cdot \cos d,$$

also $\sin \psi = -\cos \varphi \cdot \cos d$

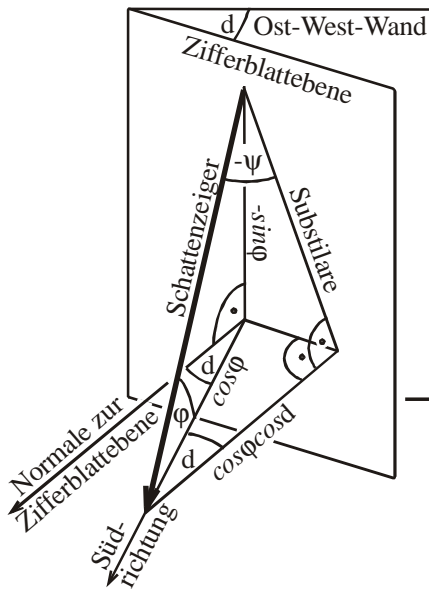


Abb. 4: Schrägbild einer abweichenden Vertikaluhr

1.1 Kugelgeometrie

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Dreiecke auf die Himmelskugel zu übertragen. Es entstehen dann Kugeldreiecke, auf die sich die sphärische Trigonometrie anwenden lässt.

Im rechtseitigen Kugeldreieck PZZ' in Abb. 5 gilt nach dem Seiten-Kosinussatz:

$$\cos(90^\circ - \psi) = \sin \psi = \cos \varphi \cdot \cos(180^\circ - d) = -\cos \varphi \cdot \cos d.$$

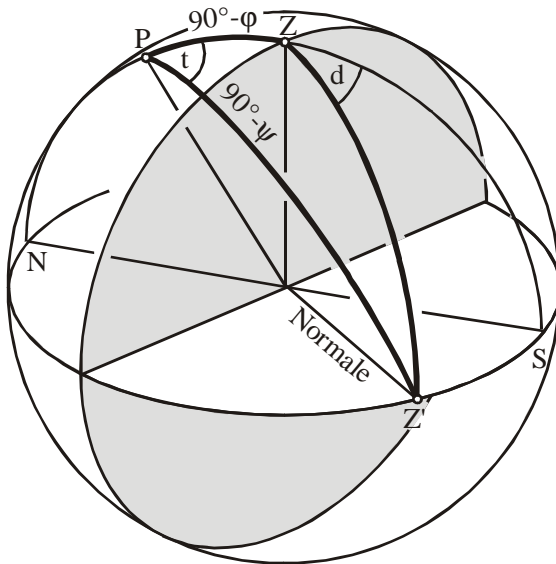


Abb. 5: Sphärisches Dreieck aus Pol P, Zenit Z des Horizonts und Zenit Z' der Zifferblattebene

1.3 Vektorrechnung

In einer weiteren Möglichkeit zeichnet man ein anschauliches Schrägbild und benützt zur Beschreibung die Vektorrechnung mit Skalarprodukt wie in Abb. 6:

$$\text{Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin d \\ \cos d \end{pmatrix}, \text{ Zeigervektor } \vec{z} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt des Normalenvektors \vec{n} der Zifferblattebene mit dem Zeigervektor \vec{z} :

$$\cos(90^\circ + \psi) = -\sin \psi = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{z}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{z}|} = \cos \varphi \cdot \cos d,$$

$$\text{also } \sin \psi = -\cos \varphi \cdot \cos d.$$

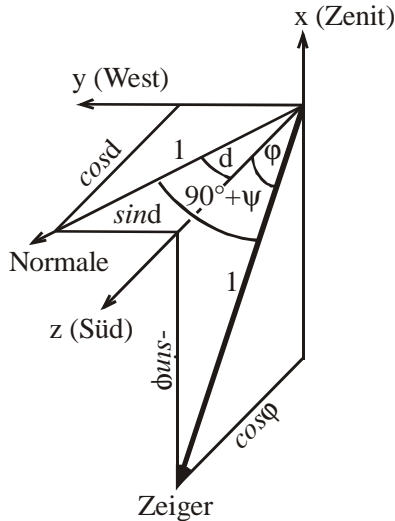


Abb. 6: Komponenten des Zeigers \vec{z} und der Zifferblattnormalen \vec{n} im dreidimensionalen Koordinatensystem

1.4 Koordinatentransformationen

Eine weitere Methode, die rasch zum Ziel führt, besteht darin, den Sonnenlauf mit dem Computer zu simulieren.

Ein Punkt der Sonnenbahn auf der Himmelskugel, der im Äquatorialsystem durch seine Koordinaten $(t | \delta)$, Stundenwinkel und Deklination, gegeben ist, wird durch eine Folge von Koordinatentransformationen in die Zifferblattebene abgebildet.

Zuerst werden aus den äquatorialen Koordinaten $(t | \delta)$ die horizontalen Koordinaten $(a | h)$, Azimut und Höhe im Horizontalsystem berechnet, dann hieraus mit Hilfe der Abweichung d der Zifferblattebene von der Ost-West-Richtung und der Neigung i gegen die Senkrechte die Koordinaten $(a' | h')$ im System der Zifferblattebene. Über die Zeigerhöhe Z , also den Abstand des schattenwerfenden Punktes G von der Zifferblattebene, werden dann aus Azimut a' und Höhe h' bezüglich der Zifferblattebene die ebenen Koordinaten des Bildpunktes in der Zifferblattebene bestimmt.

Läuft t von -180° bis 180° in Schritten von z.B. 15° bei festgehaltenem δ , so erhält man die zu dieser Deklination δ gehörige Datumslinie. Läuft dagegen δ von $-23,5^\circ$ bis $23,5^\circ$ mit einer Schrittweite von z.B. 5° bei festgehaltenem t , so ergibt sich die zu diesem Stundenwinkel t gehörige Stundenlinie. Werden nur solche Werte von t und δ zugelassen, die positive Höhen h' ergeben, so entsteht in der Zifferblattebene die wohlbekannte Arachne als Bild der Koordinatenlinien auf der Himmelskugel.

Ein solches Zifferblatt ist in Abb. 11 auf Seite 11 wiedergegeben. Die wohl schönste derartige Sonnenuhr wurde 1550 von Scultetus an der Ratsapotheke auf dem Untermarkt in Görlitz erstellt.

Transformationsformeln 8

Äquatorebene \rightarrow Horizontebene:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$$

$$\sin a \cdot \cosh = \cos \delta \cdot \sin t$$

$$\cos a \cdot \cosh = \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t - \cos \varphi \cdot \sin \delta$$

Die erste Gleichung folgt aus dem Seiten-Kosinussatz, die zweite Gleichung aus dem Sinussatz und die dritte aus dem Sinus-Kosinussatz im sphärischen Dreieck ZPS.

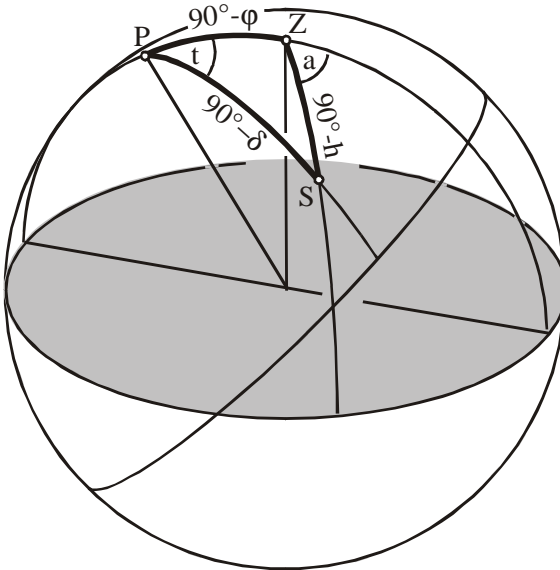


Abb. 8: System der Äquatorebene mit Pol P

Beispiel: Gegeben $\varphi=50^\circ$, $\delta=30^\circ$, $t=115^\circ$.

Dann ist $\sinh=0,148$; also $h=8,50^\circ$. Aus $\sin a \cdot \cosh=0,785>0$ und $\cos a \cdot \cosh=-0,602<0$ folgt, dass a im 2. Quadrant liegt. Aus $\tan a=-0,785/0,602=-1,304$ folgt dann $a=-52,522^\circ+180^\circ=127,48^\circ$

Transformationsformeln 9

Horizontebene → Zifferblattebene:

$$\sin h' = \sin i \cdot \sin h + \cos i \cdot \cos h \cdot \cos(a - d)$$

$$\sin a' \cdot \cos h' = \cos h \cdot \sin(a - d)$$

$$\cos a' \cdot \cos h' = \sin i \cdot \cos h \cdot \cos(a - d) - \cos i \cdot \sin h$$

Die erste Gleichung folgt aus dem Seiten-Kosinussatz, die zweite Gleichung aus dem Sinussatz und die dritte aus dem Sinus-Kosinussatz im sphärischen Dreieck Z'ZS.

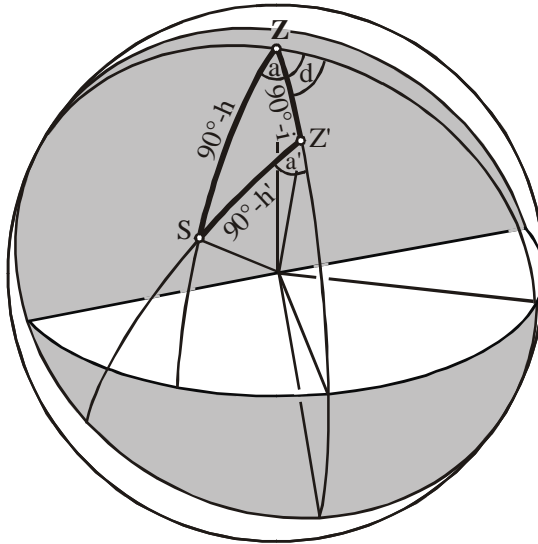


Abb. 9: System der Zifferblattebene mit Pol Z'

Beispiel: Gegeben $d = -50^\circ$, $i = 60^\circ$, $a = 140^\circ$ und $h = 50^\circ$.

Dann ist $\sin h' = 0,347$; also $h' = 20,30^\circ$. Aus $\sin a' \cdot \cos h' = -0,112 < 0$ und $\cos a' \cdot \cos h' = -0,931 < 0$ folgt, dass a' im 3. Quadrant liegt. Aus $\tan a' = 0,112 / 0,931 = 0,120$ folgt dann $a' = 6,860^\circ - 180^\circ = -173,14^\circ$

Transformationsformeln 10

Zifferblattebene → ebene Koordinaten:

$$x = \frac{Z}{\tan h'} \cdot \cos a' = Z \cdot \frac{\cos h' \cdot \cos a'}{\sin h'} \quad (h' \neq 0)$$

$$y = -\frac{Z}{\tan h'} \cdot \sin a' = -Z \cdot \frac{\cos h' \cdot \sin a'}{\sin h'} \quad (h' \neq 0)$$

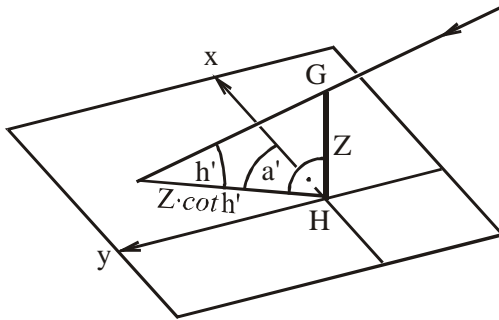


Abb. 10: Transformation der räumlichen Polarkoordinaten ($a'|h'$) bezüglich der Zifferblattebene in ebene Koordinaten ($x|y$) bezüglich der Gegenfallrichtung und Horizontalen

Bei dieser punktweisen Konstruktion werden die grundlegenden gnomonischen Eigenschaften nicht untersucht. Für die theoretische Behandlung der mathematisch-astronomischen Grundlagen genügt also diese Methode der Simulation nicht. Soweit möglich, wird die sphärische Trigonometrie benützt. Sie ist auf solche Probleme spezialisiert und liefert meistens schnelle Ergebnisse.

Der Vollständigkeit halber seien auf der nächsten Seite auch noch die Umkehr-Transformationen angegeben.

Horizont → Äquator (Formeln 11.1):

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \varphi \cdot \sin h - \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos a \\ \sin t \cdot \cos \delta &= \cos h \cdot \sin a \\ \cos t \cdot \cos \delta &= \sin \varphi \cdot \cos h \cdot \cos a + \cos \varphi \cdot \sin h \end{aligned}$$

Zifferblatt → Horizont (Formeln 11.2):

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin i \cdot \sin h' - \cos i \cdot \cos h' \cdot \cos a' \\ \sin(a-d) \cdot \cos h &= \cos h' \cdot \sin a' \\ \cos(a-d) \cdot \cos h &= \sin i \cdot \cos h' \cdot \cos a' + \cos i \cdot \sin h' \end{aligned}$$

ebene Koordinaten → Zifferblattebene (Formeln 11.3):

$$\sin h' = \frac{Z}{\sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}} \quad \sin a' = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \cos a' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

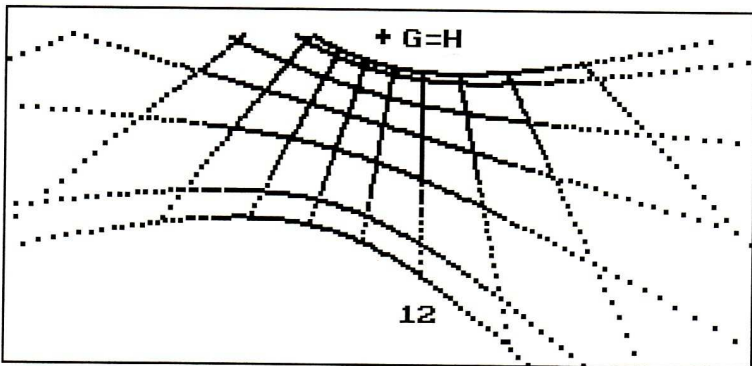


Abb. 11: Mittels Koordinatentransformationen punktweise gezeichnetes Zifferblatt einer $d=-20^\circ$ nach Osten abweichenden Vertikaluhr mit der Zeigerhöhe $Z=1,5\text{cm}$ für die geogr. Breite $\varphi=50^\circ$ mit Stundengeraden für volle Stunden und Deklinationslinien für $\delta=0, \delta=\pm 10^\circ, \delta=\pm 20^\circ, \delta=\pm 23.5^\circ$.

1.5 Koordinatensysteme:

(x,y) Koordinatensystem in der Zifferblattebene: Ursprung im Zeigereinsatzpunkt

x-Achse entgegen der Fallrichtung nach oben,

y-Achse nach links

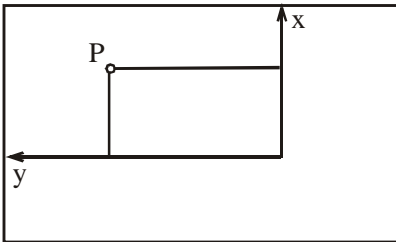


Abb. 12.1: Koordinatensystem in der Zifferblattebene

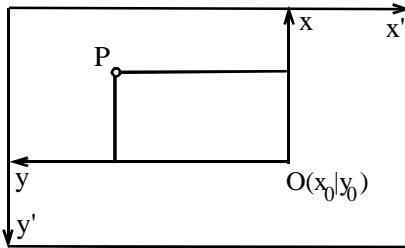


Abb. 12.2: Koordinatensystem des Grafikbildschirms des Computers

$$x' = x_0 - y$$

$$y' = y_0 - x$$

1.6 Alle **Definitionslücken** der Terme müssen vor der Berechnung mit dem Computer untersucht werden: z.B. ist

$$\cos \alpha = \frac{\tan \beta}{\tan \gamma} \text{ zwischen } -90^\circ \text{ und } +90^\circ \text{ nur definiert falls } |\beta| \leq$$

$|\gamma|$ ist, da sonst der Betrag des Quotienten größer als 1 wird, was beim Kosinus nicht möglich ist. Außerdem darf der Nenner nicht Null sein, also $\gamma \neq 0$.

1.7 **Rundungsungenauigkeiten** müssen abgesichert werden, um einen Ausstieg des Programms zu verhindern:

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ sollte auch für } 1 < x \leq 1+ge \text{ den}$$

Bogen $\pi/2$ liefern, wenn ein kleiner Fehler $ge > 0$ durch Runden auftritt. Der Programmcode in Turbo-Pascal für die Abbildung $\arcsin: [-1-ge, 1+ge] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ könnte lauten wie folgt:

```
function arcsin(x:real):real;
begin if abs(x)<1+ge then
  begin if abs(x)>=1 then
    arcsin:=pi/2*sgn(x) else
      arcsin:=arctan(x/sqrt(1+x*x))
    end
  end;
end;
```

```
function arccos(x:real):real;
begin if abs(x)<1+ge then
  begin if abs(x)>=1 then
    arccos:=pi/2*(1-sgn(x)) else
      arcsin:=arctan(1/sqrt(1+x*x))
    end
  end;
end;
```

Dabei ist die Abbildung $sgn: \mathbb{R} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ folgendermaßen festgelegt:

```
function sgn(x:real):integer;
begin if x=0 then sgn:=0 else if x>0 then
  sgn:=1 else sgn:=-1
end;
```

Die Rundungsungenauigkeit ge kann als Konstante vereinbart werden, z.B. `const ge=0.001;`
 $\arcsin(1.0005)$ liefert dann den Bogen $1.5708\dots = \pi/2$.

1.8 Die **Nichtumkehrbarkeit** der trigonometrischen Funktionen macht Umstände.

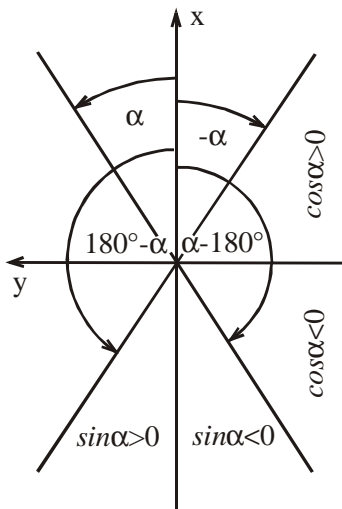


Abb14: Orientierung des Koordinatensystems

Folgt aus $\sin \alpha=0.829$ für den Winkel $\alpha=56^\circ$ oder 124° ? Welcher Winkel ist der richtige? Der erfahrene Sonnenuhrbauer spiegelt gegebenenfalls die Stundengerade an der x-Achse und zeichnet den Winkel $180^\circ-\alpha=124^\circ$ statt α .

Der Computer macht dies nur dann, wenn es ihm vorher gesagt wurde. Man berechnet daher für den Winkel den Wert bei einer zweiten trigonometrischen Funktion, zum Beispiel $\cos \alpha=-0.559$.

Aus $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ und den Vorzeichen von Zähler und Nenner

des Quotienten kann mit der folgenden Pascal-Funktion

$$\text{atn: } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow]-180^\circ, 180^\circ]$$

eindeutig der zugehörige Winkel α zwischen -180° und einschließlich 180° bestimmt werden. Da der Zähler im angegebenen Beispiel positiv, der Nenner aber negativ ist, liegt der Winkel α im zweiten Quadranten, also ist $\alpha=124^\circ$.

Die ungewöhnliche Orientierung des Koordinatensystems wird sich später als günstig erweisen.

Für Winkel α , deren Beträge größer als 90° sein können, werden deshalb **zwei** trigonometrische Funktionen $x=\cos\alpha$ und $y=\sin\alpha$ angegeben. Daraus lässt sich der Winkel α mit der Funktion $\text{atn}(x, y)$ über den halben Winkel eindeutig bestimmen:

$$\alpha = \text{atn}(x, y) = \begin{cases} 180^\circ & \text{für } x = -1 \\ 2 \cdot \arctan \frac{y}{1+x} & \text{für } x \neq -1 \end{cases}$$

oder auch mit folgender Pascal-Funktion, wobei x und y hier auch positive Vielfache von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ sein dürfen:

```
function atn(x,y:real):real;
begin if x=0 then atn:=pi/2*sgn(y) else
      if y=0 then atn:=pi/2*(1-sgn(x)) else
        atn:=arctan(y/x)+pi/2*(1-sgn(x))*sgn(y)
      end;
```

1.9 Berechnung von Deklination δ und zugehörigen Werten der Zeitgleichung z_g

Nach Montenbruck, Grundlagen der Ephemeridenrechnung, 1989₄, Seite 86, lassen sich die Werte der Mittelpunktsgleichung durch Fourientwicklung nach der mittleren Anomalie berechnen:

$$\mu = 1,9146^\circ \cdot \sin M + 0,0200^\circ \cdot \sin 2M + 0,0003^\circ \cdot \sin 3M + \dots$$

Die mittlere Anomalie $M = \frac{t - T_0}{T_a} \cdot 360^\circ$ ist die Länge einer gleichförmigen mittleren Sonne vom Perigäum aus.

T_0 ist die Perihelzeit und L_0 die zugehörige Länge der Sonne, z.B.

$$T_0 = 2010\text{Jan}3,67 \text{ und } L_0 = 283,112^\circ.$$

$T_a=365,2596$ (anomalistisches Jahr) ist die Umlaufdauer der Erde, t der Berechnungszeitpunkt in Weltzeit und $e=23,44^\circ$ die Schiefe der Ekliptik.

Mittlere ekliptikale Länge der Sonne: $l = M + L_0$

Wahre ekliptikale Länge der Sonne: $\lambda = l + \mu$

Rektaszension der wahren Sonne: $r = \arctan(\cos\lambda, \sin\lambda \cdot \cos e)$

Zeitgleichung: $zg = \arcsin(\sin(l-r)) \cdot 4\text{min}$

Deklination: $\sin\delta = \sin\lambda \cdot \sin e$

Beispiel: Die Berechnung für 1. August 2006 um UT=12h ergibt:

$$t - T_0 = -1251,17$$

$$M = 206,85^\circ$$

$$l = 129,96^\circ$$

$$\lambda = 129,11^\circ$$

$$r = 131,55^\circ$$

$$zg = -6,34\text{min}$$

$$\delta = 17,98^\circ$$

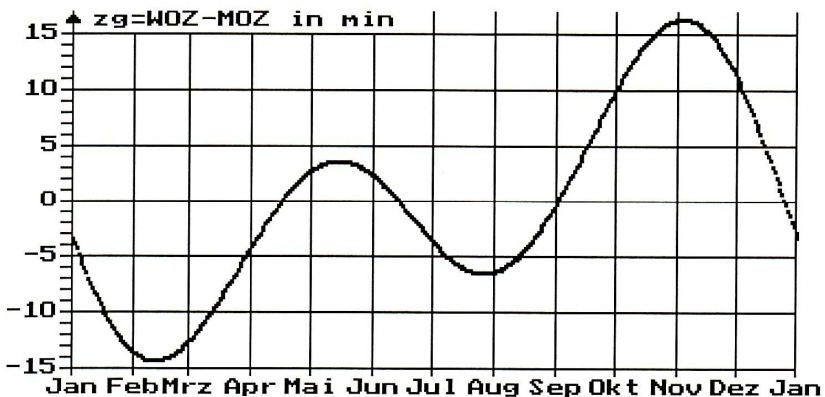


Abb. 16: Ephemeriden der Zeitgleichung

1.10 Das julianische Datum jd

Zur Berechnung der Zeitgleichung in Teil 1.9 braucht man die Zeitdifferenz zwischen dem Beobachtungsdatum und dem Periheliumdatum 3. Januar 2010, UT=16 Uhr. Dafür ist eine fortlaufende Tageszählung sehr geschickt.

Das julianische Datum gibt die Anzahl der Tage an, die seit dem 1. Januar des Jahres -4713 , UT=12Uhr, vergangen sind.

Die folgende Pascal-Funktion gilt im Zeitraum vom 1. März 1900 bis 28. Februar 2100.

```
function jd(d,m,y:integer;UT:real):real;  
var x:real,  
begin if (m<=2) then  
  begin m:=m+12; y:=y-1  
  end;  
  x:=int(365.25*y)+int(30.6001*(m+1));  
  jd:=x+1720981.5+d+UT/24  
end;
```

Beispiel:

1. Die Berechnung für 1. August 2006, UT=12h ergibt:

d=1, m=8, y=2006, h=12,

julianisches Datum: $jd=732\,691+275+1\,720\,981,5+1+0,5$
 $=2\,453\,949,0$.

2. Die Berechnung für 3. Januar 2010, UT=16h ergibt:

d=3, m=13, y=2009, h=16,

julianisches Datum: $jd=733\,787+428+1\,720\,981,5+3+0,67$
 $=2\,455\,200,17$.

3. Die Differenz zwischen den beiden julianischen Daten beträgt $-1251,17$ wie in obigem Beispiel in Teil 1.9 auf Seite 16.

1.11 Längenausgleich

Soll die Uhr nicht die Wahre Ortszeit WOZ des Aufstellungsortes mit der geographischen Länge λ anzeigen, sondern die Wahre Ortszeit des Zeitzonenmeridians mit der Länge λ_0 , so ist der Stundenwinkel t (in Grad) zu ersetzen durch $t+(\lambda_0-\lambda)$. Die 12-Uhr Linie verläuft senkrecht bei allen Vertikaluhren, die WOZ anzeigen, auch bei abweichenden.

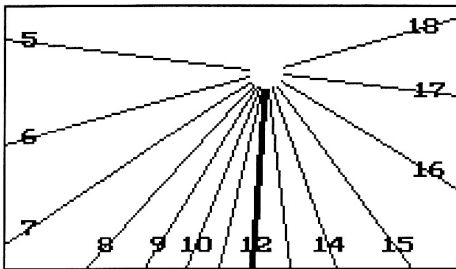


Abb. 18.1: $\varphi=50^\circ$, $d=-20^\circ$, $i=0$, $\lambda=-10^\circ$,
 $\lambda_0=-15^\circ$

Abb. 18.1 zeigt das Zifferblatt einer vertikalen abweichenden Uhr mit Längenausgleich. Die 12-Uhr Linie ist nicht senkrecht, sondern zurück gedreht, da der Zeitzonenmeridian östlich des Aufstellungsortes liegt.

Abb. 18.2 zeigt eine abweichende und geneigte Uhr ohne Längenausgleich.

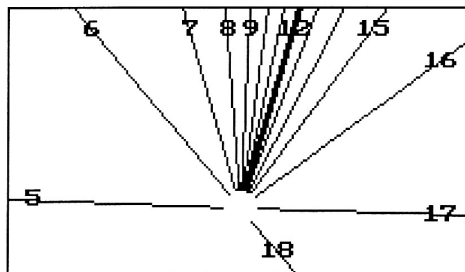


Abb. 18.2: $\varphi=50^\circ$, $d=-20^\circ$, $i=55^\circ$,
 $\lambda=\lambda_0$ WOZ

Verläuft die 12-Uhr Linie auf einer geneigten Uhr mit Inklination $i \neq 0$ nicht senkrecht, so kann man daraus also nicht schließen, dass es sich um eine Uhr mit Längenausgleich handelt.

Abb. 19 zeigt eine abweichende und geneigte Uhr mit Längenausgleich.

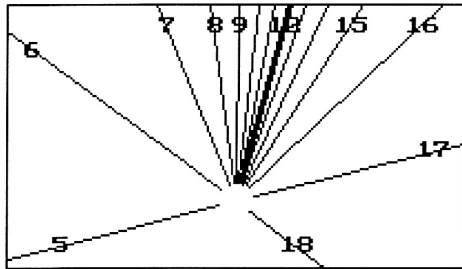


Abb. 19: $\varphi=50^\circ$, $d=-20^\circ$, $i=55^\circ$, $\lambda=-10^\circ$,
 $\lambda_0=-15^\circ$

Umrechnung der Ablesung WOZ auf der Sonnenuhr in die gesetzliche Uhrzeit MEZ:

$\lambda_0=-15^\circ$, während der Sommerzeit $\lambda_0=-30^\circ$

Umrechnung WOZ \rightarrow MEZ:

$$\text{MEZ} = \text{WOZ} - (\lambda_0 - \lambda) \cdot 4 \text{min} - z_g$$

Umgekehrt MEZ \rightarrow WOZ:

$$\text{WOZ} = \text{MEZ} + (\lambda_0 - \lambda) \cdot 4 \text{min} + z_g$$

Beispiel:

Gegeben sei der Beobachtungsort Stuttgart mit der geographischen Länge $\lambda=-9^\circ$ am 1. August 2006.

1. Die Sonnenuhr zeige WOZ=5 Uhr an. Es ist $z_g \approx -6 \text{min}$.

Auf der Armbanduhr ist es dann

$$\text{MESZ} = 5 \text{h} - (-30 + 9) \cdot 4 \text{min} + 6 \text{min} = 5 \text{h} + 84 \text{min} + 6 \text{min} = 6 \text{h} 30 \text{min}$$

2. Die Armbanduhr zeige MSEZ=13h30min Sommerzeit an.

Es ist $z_g \approx -6 \text{min}$.

$$\text{Dann gilt } \text{WOZ} = 13 \text{h} 30 \text{min} + (-30 + 9) \cdot 4 \text{min} - 6 \text{min}$$

$$= 13 \text{h} 30 \text{min} - 1 \text{h} 30 \text{min} = 12 \text{h}$$

d.h. am Ende der Mittagspause hat die Sonne gerade ihren Höchststand erreicht.

2. Charakteristische Winkel

Charakteristisch für das Zifferblatt sind drei Winkel, nämlich

- 2.1 der Winkel ψ zwischen Zeiger und Substilare,
- 2.2 der Winkel σ zwischen Gegenrichtung zur Falllinie und Substilare,
- 2.3 der Stundenwinkel τ der Sonne, für den der Schatten auf die Substilare fällt.

Wir versuchen, die Bedeutung dieser Winkel zu veranschaulichen und stellen uns ein Wesen vor, das auf einer beliebig von der Südrichtung abweichenden und gegen die Horizontale geneigten Ebene haust. Schwer erklärbar für dieses Wesen ist eine ausgezeichnete Richtung auf seiner Ebene, in der sich alle Körper zu bewegen trachten, wenn ihnen der nötige Halt entzogen wird. Wir Menschen nennen diese Richtung die Falllinie der Ebene.

Da die Zifferblattebene von der durchsichtig gedachten Erde bei ihrer Drehung mitgenommen wird, kann auch das Wesen mit etwas Geduld täglich beobachten, wie sich die Sonne auf einem bis zur höchsten Stellung über der Zifferblattebene ansteigenden und dann wieder abfallenden Tagbogen über das Himmelsgewölbe bewegt. Der Winkel τ ist der Stundenwinkel, bei dem die Sonne über der Zifferblattebene kulminiert. Für das Wesen ist dann Mittag. Zur Mittagszeit auf der Zifferblattebene fällt der Schatten auf die Substilare. Sie ist die senkrechte Projektion des Schattenzeigers in die Zifferblattebene. Der Schattenzeiger weist stets zu demjenigen Himmelspol, der über der Zifferblattebene liegt. Die Substilare ist um den Winkel σ gegen die Gegenrichtung zur Falllinie entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn gedreht. Das Zifferblatt ist achsensymmetrisch bezüglich der Substilare für Zeitpunkte, die äquidistant zu τ liegen.

Bei günstiger Orientierung der Ebene sieht das Wesen den Polarstern, um den sich die anderen Gestirne drehen, unter dem Winkel ψ über seiner Zifferblattebene am Himmel stehen. Der Winkel ψ ist der Erhebungswinkel des Nordpols bezüglich der Zifferblattebene.

Für uns Menschen, die wir auf der Horizontalebene leben, kulminiert die Sonne mit dem Stundenwinkel $\tau=0$ und der Schatten fällt dann in Nord-Süd-Richtung auf die Substilare: $\sigma=0$. Der Erhebungswinkel des Polarsterns entspricht der geographischen Breite φ des Standorts

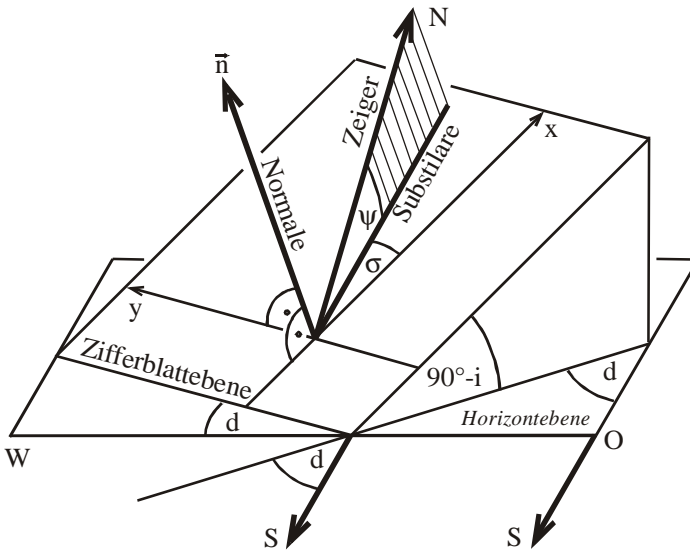


Abb. 21: Orientierung des Zifferblatts

Diese Veranschaulichung zeigt, inwiefern die drei Winkel ψ , σ , τ für das Zifferblatt charakteristisch sind: Aus dem Zifferblatt einer für die geographische Breite $\varphi' = \psi$ berechneten Horizontaluhr erhält man das gesuchte Zifferblatt der geneigten und abweichenden Uhr, indem man das Zifferblatt um den Winkel σ dreht.

Dies wird in der Versetzungsregel folgendermaßen ausgedrückt: Am Herstellungsort mit der geographischen Länge λ und der Breite ϕ deklinierende (abweichende) und inklinierende (geneigte) Uhren werden durch Parallelverschiebung zu Horizontaluhren, wenn man sie an den Ort mit der geographischen Länge $\lambda+\tau$ und der geographischen Breite ψ bringt und dann um den Winkel σ gegen den Uhrzeiger dreht.

Der Normalenvektor der Zifferblattebene zeigt, wenn vom Erdmittelpunkt aus gezeichnet, auf den Ort mit der geographischen Länge $\lambda+\tau$ und der Breite ψ , in dem die Zifferblattebene Tangentialebene an die Erdkugel wäre und das Zifferblatt einer Horizontaluhr trüge.

3. Stundengeraden

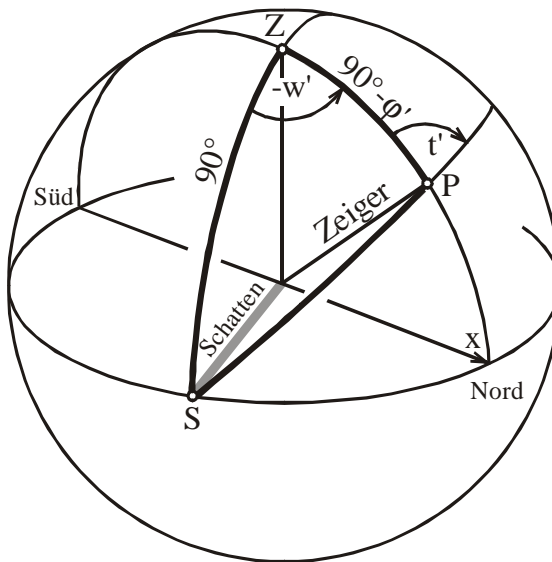


Abb. 22: Stundenlinienwinkel w'

3.1 Stundenlinienwinkel w' bei der Horizontaluhr

Im rechtseitigen Kugeldreieck ZSP in Abb. 22 gilt für den Winkel w' zwischen der Stundenlinie zum Stundenwinkel t' und der x-Achse (Substilare) bei der Horizontaluhr in der geographischen Breite φ'

$$\cos(90^\circ - \varphi') = \tan(w') \cot(180^\circ - t')$$

oder $\tan w' = \sin \varphi' \tan t'$

t' ist der Stundenwinkel, der nach den Transformationsformeln (11.1) Horizont \rightarrow Äquator zum Azimut w' und zur Höhe $h=0$ gehört.

Für $|t'| > 90^\circ$ ist ebenfalls $|w'| > 90^\circ$. Um w' im richtigen Quadranten zu erhalten,

setzen wir daher $x = \cos t'$.

Dann ist $y = -\sin \varphi' \cdot \sin t'$

und $w' = \operatorname{atan}(x, y)$

3.2 Winkel w zwischen den Stundenlinien für die Stundenwinkel t und der Gegenrichtung zur Falllinie bei abweichender und geneigter Uhr mit den charakteristischen Winkeln ψ , σ und τ :

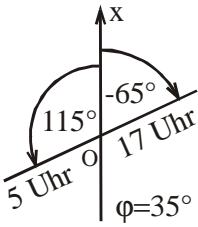
Berechne für die Horizontaluhr mit $\varphi' = \psi$ die Winkel w' zwischen x-Achse und Stundenlinien für die Stundenwinkel

$$t' = t - \tau$$

und drehe dann das Zifferblatt um den Winkel σ gegen den Uhrzeiger:

$$w = w' + \sigma .$$

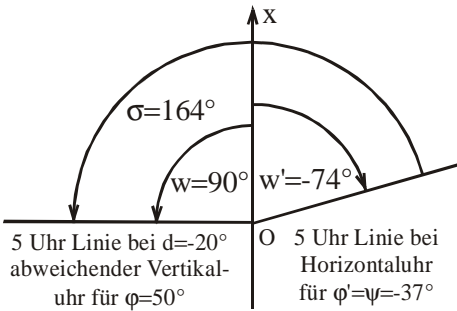
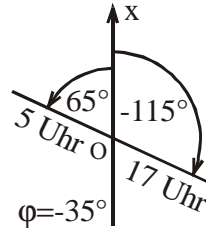
Ist w größer als 180° oder kleiner oder gleich -180° , so sind 360° solange zu subtrahieren bzw. zu addieren bis der Winkel w im Intervall $]-180^\circ, 180]$ liegt.



Beispiel 1a) Gegeben sei eine Horizontaluhr, also $d=0$ und $i=90^\circ$ auf Kreta mit der geographischen Breite $\varphi=35^\circ$. Es ist $\psi=\varphi=35^\circ$ und $\sigma=\tau=0$. Wir berechnen den Stundenlinienwinkel für 17 Uhr, also $t'=t=75^\circ$: $x=0,26$ und $y=-0,55$ also $w=w'=-65^\circ$ und den Winkel für 5 Uhr, also $t'=t=-105^\circ$: $x=-0,26$ und $y=0,55$

also $w=w'=115^\circ$.

b) Gegeben sei nun eine Horizontaluhr in Montevideo mit $\varphi=-35^\circ$. Es ist $\psi=\varphi=-35^\circ$ und $\sigma=180^\circ$ und $\tau=0$. Wir berechnen wieder die Stundenlinienwinkel für 17 Uhr und für 5 Uhr, also $t'=t=75^\circ$: $x=0,26$ und $y=0,55$ also $w=w'=65^\circ$ und $t'=t=-105^\circ$: $x=-0,26$ und $y=-0,55$ also $w=w'=-115^\circ$.



Beispiel 2: Gegeben sei eine 20° nach Osten abweichende Vertikal- uhr, also $d=-20^\circ$ und $i=0$ in Würzburg mit $\varphi=50^\circ$. Nach den Formeln im nachfolgenden Teil 3.5 ergeben sich die charakteristischen Winkel zu $\psi=-37^\circ$,

$\sigma=164^\circ$ und $\tau=-25^\circ$. Wir berechnen den Winkel w zwischen der 5-Uhr-Stundenlinie und der Gegenrichtung zur Falllinie: zu 5 Uhr gehört der Stundenwinkel $t=-105^\circ$. Dann ist $t'=t-\tau=-80^\circ$ und $w'=-74^\circ$. Die Abbildung zeigt, wie die 5-Uhr-Linie der äquivalenten Horizontaluhr um $\sigma=164^\circ$ gegen den Uhrzeiger zu drehen ist. Man vergleiche hierzu auch Beispiel 2, Seite 31.

3.3 Orientierungen

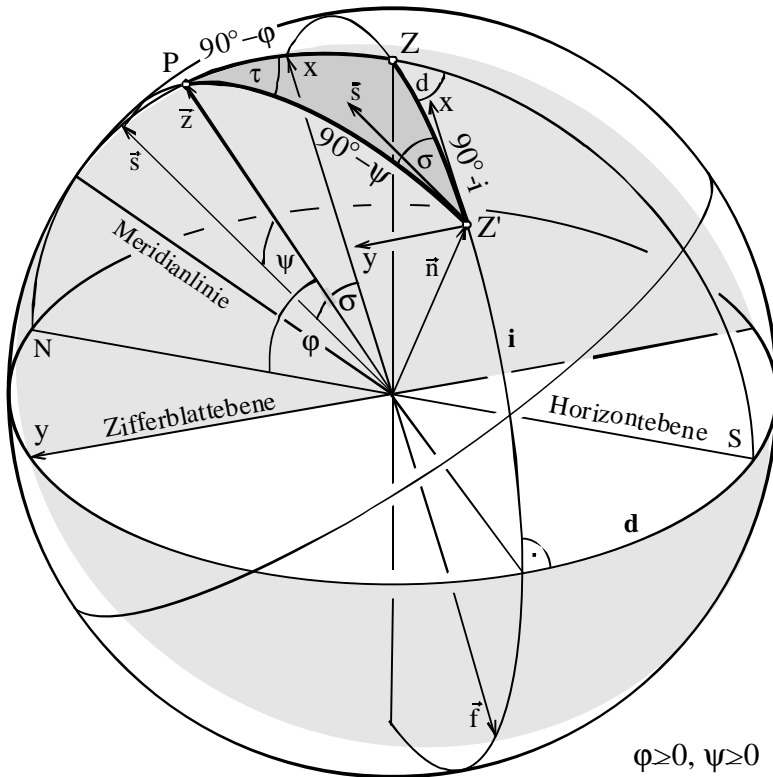


Abb. 25: Gnomonisches Dreieck Z'ZP

- P: Nordpol, \bar{P} : Südpol, Z: Zenit der Zifferblattebene
d: Deklination des Zifferblatts, Südazimut des Normalenvektors \bar{n} der Zifferblattebene, der zum Betrachter weist: $-180^\circ \leq d \leq 180^\circ$, positiv nach Westen
i: Inklination des Zifferblatts, Höhenwinkel des Normalenvektors \bar{n} : $-90^\circ \leq i \leq 90^\circ$
 ψ : Winkel zwischen dem Poloszeiger \bar{z} und seiner orthogonalen Projektion \bar{s} , der Substilarer, in die Zifferblattebene: $-90^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$

σ : Winkel zwischen der Gegenrichtung zur Falllinie \vec{f} der Zifferblattebene und der Substilar \vec{s} :

$-180^\circ < \sigma \leq 180^\circ$, von der Gegenrichtung aus gegen den Uhrzeiger positiv

τ : Stundenwinkel der Sonne, für den der Schatten auf die Substilare fällt: $-180^\circ < \tau \leq 180^\circ$

3.4 Formeln für die charakteristischen Winkel

Für positive und negative geographische Breiten φ gilt:

$$\sin \psi = \sin \varphi \cdot \sin i - \cos \varphi \cdot \cos i \cdot \cos d \quad (-90^\circ \leq \psi \leq 90^\circ)$$

Diese Gleichung folgt aus dem Seiten-Kosinussatz.

$\psi > 0$: Zeiger zeigt zum Nordpol, der Schatten dreht im Uhrzeigersinn

$\psi < 0$: Zeiger weist zum Südpol, der Schatten dreht gegen den Uhrzeiger

$\psi = 0$: Zeiger parallel zur Zifferblattebene: Polaruhr

$$\sin \tau \cdot \cos \psi = \cos i \cdot \sin d \quad (\psi \neq \pm 90^\circ)$$

$$\cos \tau \cdot \cos \psi = \sin i \cdot \cos \varphi + \cos i \cdot \sin \varphi \cdot \cos d$$

Die erste Gleichung folgt aus dem Sinussatz, die zweite aus dem Sinus-Kosinussatz.

$$\sin \sigma \cdot \cos \psi = \cos \varphi \cdot \sin d \quad (\text{für } 0 \leq \psi < 90^\circ)$$

$$\cos \sigma \cdot \cos \psi = \sin \varphi \cdot \cos i + \cos \varphi \cdot \sin i \cdot \cos d$$

Da für $-90^\circ < \psi < 0$ der Südpol über der Ebene liegt, zeigt der Zeiger in die entgegengesetzte Richtung. Daher ist als Substilarwinkel σ der um 180° größere oder kleinere Winkel zu nehmen. Die Sinus- und Kosinuswerte haben dann die entgegengesetzten Vorzeichen.

Für $\psi = \pm 90^\circ$ setzen wir $\tau = 0$ und $\sigma = 180^\circ$.

3.5 Zusammenfassung

φ : geographische Breite

d : Abweichung des Zifferblatts bzw. Südazimut nach Westen des Normalenvektors

i : Neigung des Zifferblatts bzw. Höhenwinkel des Normalenvektors der Zifferblattebene

t : Stundenwinkel der Sonne vom Ortsmeridian aus nach Westen

x -Achse parallel, aber entgegengesetzt zur Falllinie des Zifferblatts, y -Achse nach links

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} +1 & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha = 0 \\ -1 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{atn}(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + 90^\circ \cdot (1 - \operatorname{sgn} x) \cdot \operatorname{sgn} y & x \neq 0, y \neq 0 \\ 90^\circ \cdot (1 - \operatorname{sgn} x) & x \neq 0, y = 0 \\ 90^\circ \cdot \operatorname{sgn} y & x = 0 \end{cases}$$

Winkel ψ mit $-90^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ zwischen Zeiger und Substilarre:

$$x = \sin \varphi \cdot \sin i - \cos \varphi \cdot \cos i \cdot \cos d$$

$$\psi = \arcsin x$$

Winkel σ mit $-180^\circ < \sigma \leq 180^\circ$ zwischen Substilarre und x -Achse für $\cos \psi \neq 0$:

$$x = \pm (\sin \varphi \cdot \cos i + \cos \varphi \cdot \sin i \cdot \cos d)$$

$$y = \pm \cos \varphi \cdot \sin d$$

$$\sigma = \operatorname{atn}(x, y)$$

Für $\psi \geq 0$ gilt das Pluszeichen, für $\psi < 0$ das Minuszeichen.

Stundenwinkel τ mit $-180^\circ < \tau \leq 180^\circ$, für den der Schatten auf die Substilare fällt für $\cos\psi \neq 0$:

$$\begin{aligned}x &= \sin i \cdot \cos \varphi + \cos i \cdot \sin \varphi \cdot \cos d \\y &= \cos i \cdot \sin d \\ \tau &= \operatorname{atn}(x, y)\end{aligned}$$

Für $\cos\psi=0$ (Äquatorialuhr) setzen wir $\sigma=180^\circ$ und $\tau=0$.

Winkel w mit $-180^\circ < w \leq 180^\circ$ zwischen Stundenlinie für den Stundenwinkel t und der x -Achse:

$$\begin{aligned}x &= \cos(t - \tau) \\y &= -\sin\psi \cdot \sin(t - \tau) \\w &= \operatorname{atn}(x, y) + \sigma\end{aligned}$$

Für $\psi=0$ (Polaruhr) sind die Stundenlinien parallel zur Substilare im Abstand $-Z \cdot \tan(t - \tau)$.

Beispiel 1:

Breite $\varphi=-40^\circ$, Deklination $d=30^\circ$,

Inklination $i=20^\circ$,

Stundenwinkel $t=60^\circ$ für 16 Uhr.

Zeigerwinkel ψ zwischen Zeiger

und Substilare: $x=-0,843$; also

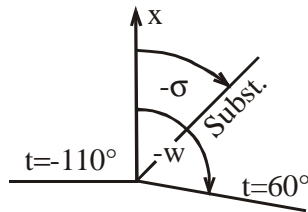
$\psi=-57,5^\circ$;

Substilarwinkel σ : $x=0,377$ und $y=-0,383$; also $\sigma=-45,5^\circ$;

Substilarzeit τ : $x=-0,261$ und $y=0,470$; also $\tau=119,1^\circ$

Stundenlinienwinkel w für $t=60^\circ$: $x=0,514$ und $y=-0,723$;

also $w=-54,6^\circ + \sigma = -100,1^\circ$.



3.6 Zeichenhilfen

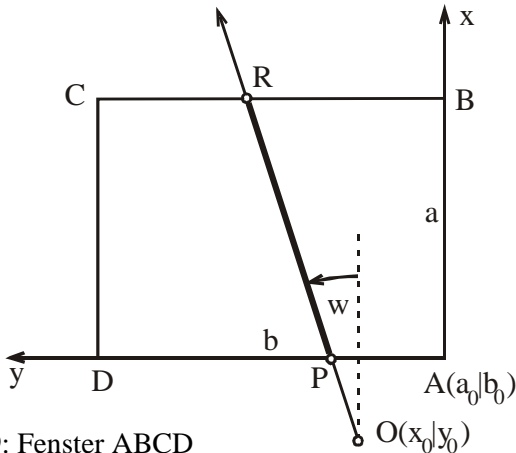


Abb. 29: Fenster ABCD

Weder bei der Zeichnung der Stundenhalbgeraden mit dem Computer noch von Hand ist die Festlegung durch den Anfangspunkt O und den Richtungswinkel w sehr bequem. Besser ist die Berechnung der Schnittpunkte P und Q der Halbgeraden mit dem Zifferblattrand. Wenn der Zeigerdurchstoßpunkt O innerhalb des Zifferblatts liegt, ersetzt O einen der beiden Punkte auf dem Rand. In vielen Computergraphiken kann man dann den Befehl `line(p,q,r,s)` verwenden, der die Strecke vom Punkt $P(p|q)$ zum Punkt $R(r|s)$ zeichnet. Bei Zeichnung von Hand druckt man die Koordinaten der Punkte P und Q aus. Auf dem Rand des Zifferblatts lassen sich diese Punkte sehr einfach einzeichnen durch Abmessen ihrer Entfernung von einer Ecke aus. Die folgende Prozedur zeichnet von der Stundenhalbgeraden mit dem Anfangspunkt $O(x_0|y_0)$ und dem Richtungswinkel w den Abschnitt, der auf einem rechteckigen Zifferblatt mit der Höhe a und der Breite b erscheint, dessen rechte untere Ecke die Bildschirmkoordinaten $(a_0|b_0)$ hat.

```

procedure fenster(w:real);
var i,k,p,q,r,s: integer;
    m1,m2,lambda,x,y: real;
    u,v: array[1..2] of real;
begin k:=0; w:=w/180*pi;
m1:=cos(w); m2:=sin(w);
if ((0<=x0)and(x0<=a)and(0<=y0)and(y0<=b))
then begin u[1]:=x0; v[1]:=y0; k:=1 end;
for i:=0 to 1 do
begin if m2<>0 then
    begin lambda:=(i*b-y0)/m2;
        if lambda>0 then
            begin x:=x0+lambda*m1;
                if ((0<=x)and(x<=a)) then
                    begin k:=k+1; u[k]:=x; v[k]:=i*b end
                end
            end
        end;
for i:=0 to 1 do
begin if m1<>0 then
    begin lambda:=(i*a-x0)/m1;
        if lambda>0 then
            begin y:=y0+lambda*m2;
                if ((0<y)and(y<b)) then
                    begin k:=k+1; u[k]:=i*a; v[k]:=y end
                end
            end
        end;
p:=round(a0-v[1]); q:=round(b0-u[1]);
r:=round(a0-v[2]); s:=round(b0-u[2]);
if k=2 then line(p,q,r,s)
end;

```

Beispiel 2:

Zum Vergleich wird die in Abb. 11 dargestellte $d=-20^\circ$ nach Osten abweichende Vertikaluhr für die geographische Breite $\varphi=50^\circ$ nun in Abb. 31 mit Hilfe der charakteristischen Winkel gezeichnet. Die Berechnung der charakteristischen Winkel ergibt: $\psi=-37,2^\circ$; $\sigma=164,0^\circ$ und $\tau=-25,4^\circ$.

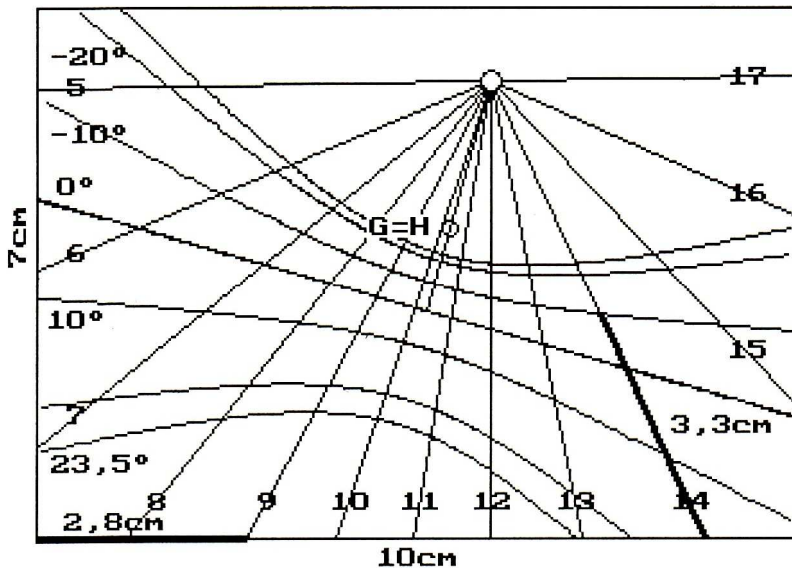


Abb. 31: Mit den charakteristischen Winkeln gezeichnetes Zifferblatt

Bezüglich der linken unteren Ecke haben die Schnittpunkte der Stundenlinien mit dem Rand der Zifferblattebene die in der Tabelle unten aufgeführten Koordinaten in cm. Da der Zeigerfußpunkt O innerhalb des Zifferblatts liegt, ist er der allen Stundenlinien gemeinsame Punkt mit den Koordinaten (6,0|6,0).

Tangentenstrecken der Stundenlinienwinkel w:

Äquinoktiallinie	w= 74,0°	(6.0; 1.6)
		(0.0; 4.5)
Substilare	w= 164,0°	(5.1; 3.0)
		(6.0; 6.0)
t=-105° 5Uhr	w= 90,9°	(6.0; 6.0)
		(0.0; 5.9)
t= -90° 6Uhr	w= 112,2°	(6.0; 6.0)
		(0.0; 3.6)
t= -75° 7Uhr	w= 128,6°	(6.0; 6.0)
		(0.0; 1.2)
t= -60° 8Uhr	w= 141,4°	(6.0; 6.0)
		(1.2; 0.0)
t= -45° 9Uhr	w= 151,9°	(6.0; 6.0)
		(<u>2.8</u> ; 0.0)
t= -30° 10Uhr	w= 161,2°	(6.0; 6.0)
		(4.0; 0.0)
t= -15° 11Uhr	w= 170,3°	(6.0; 6.0)
		(5.0; 0.0)
t= 0° 12Uhr	w= 180,0°	(6.0; 6.0)
		(6.0; 0.0)
t= 15° 13Uhr	w=-168,8°	(6.0; 6.0)
		(7.2; 0.0)
t= 30° 14Uhr	w=-154,8°	(6.0; 6.0)
		(8.8; 0.0)
t= 45° 15Uhr	w=-136,5°	(6.0; 6.0)
		(10.0; 1.8)
t= 60° 16Uhr	w=-113,6°	(6.0; 6.0)
		(10.0; 4.3)
t= 75° 17Uhr	w= -89,1°	(6.0; 6.0)
		(10.0; 6.1)

Soll die Uhr nicht die Wahre Ortszeit des Aufstellungsortes mit der geographischen Länge λ anzeigen, sondern die Wahre Ortszeit des Zeitzonenmeridians mit der Länge λ_0 , so ist der Stundenwinkel t (in Grad) zu ersetzen durch $t+(\lambda_0-\lambda)$.

Soll die gesetzliche Zeit der Armbanduhren angezeigt werden, so muss zusätzlich noch die Zeitgleichung z_g (in Minuten und im Februar negative Werte) berücksichtigt werden. Dann ist t zu ersetzen durch $t+(\lambda_0-\lambda)+z_g/4$. Die Zeit wird nicht mehr durch die Richtung des Schattens des ganzen Schattenzeigers angegeben, sondern durch die Lage des Schattenpunktes allein der Zeigerspitze zwischen den Stundenlinien. Auf einer solchen Uhr mit Punktzeiger kann man außerdem das Datum an der Lage des Schattenpunktes zwischen den Datumslinien ablesen. Allerdings sind die Stundenlinien dann keine Geraden mehr. Die bemerkenswerte Eigenschaft einer normalen Uhr mit Poloszeiger, dass die Richtung des Schattens für einen bestimmten Stundenwinkel vom Datum unabhängig ist, gilt dann nicht mehr.

Ein Beispiel einer Uhr mit MEZ Anzeige für steigende Deklinationen in der Zeit vom 21. Dezember bis 21. Juni zeigt die folgende Abb. 33. Es ist $\varphi=50^\circ$, $\lambda=-10^\circ$ (Würzburg), $\lambda_0=-15^\circ$ (Görlitz), $d=-20^\circ$ (nach Osten abweichend), $i=0$ (Vertikaluhr) und die Zeigerhöhe $Z=1,5\text{cm}$.

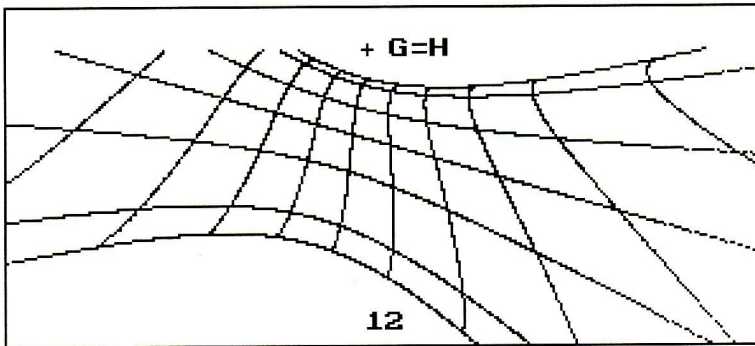


Abb. 33: Datumslinien für steigende Deklinationen

3.7 Deklinationslinien

Mit Hilfe von Parameterformen kann man die Deklinationslinien leicht zeichnen. Die Polarkoordinaten (r, ρ) eines Kurvenpunktes bezüglich Zeigerfußpunkt und x-Achse (Gegenfallrichtung) berechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}x &= \cos(t - \tau) \\y &= -\sin \psi \cdot \sin(t - \tau) \quad \text{für } -180^\circ < t \leq 180^\circ \\ \rho' &= \operatorname{atan}(x, y)\end{aligned}$$

Für den Winkel μ zwischen Zeiger und Stundenlinie gilt:

$$\cos \mu = \cos \psi \cdot \cos \rho'$$

Entfernung des Schattenpunktes vom Zeigerfußpunkt

$$r = \frac{Z \cdot \cos \delta}{\cos(\mu - \delta) \cdot \sin |\psi|} \quad \text{für } -23,5^\circ \leq \delta \leq 23,5^\circ$$

Für den Polarwinkel gilt $\rho = \rho' + \sigma$.

Geschlossene Gleichungen der Deklinationslinien werden erst in Teil 5 behandelt.

Zur bequemen Zeichnung einer großen Uhr von Hand enthält die folgende Tabelle auf Seite 35 die Entfernungen der Schnittpunkte der Deklinationslinien mit den Stundenlinien von den Schnittpunkten der Stundenlinien mit dem Rand, entlang dem die Stundenlinien beziffert sind. Durch einfaches Abmessen von Strecken auf den schon gezeichneten Stundenlinien wird so eine ausreichende Anzahl von Punkten auf den Deklinationslinien festgelegt. Durch Einzeichnen von Halb-Stundenlinien usw. kann die Anzahl bei Bedarf vergrößert werden.

Entfernungen der Schnittpunkte der Deklinationslinien mit den Stundenlinien vom Zifferblattrand:

$\delta = -23.5^\circ$	5Uhr	2.2	6Uhr	3.6	7Uhr	5.1
	8Uhr	5.3	9Uhr	4.4	10Uhr	4.0
	11Uhr	3.7	12Uhr	3.6	13Uhr	3.7
	14Uhr	4.0	15Uhr	2.7		
$\delta = -20^\circ$	5Uhr	1.8	6Uhr	3.4	7Uhr	5.0
	8Uhr	5.2	9Uhr	4.3	10Uhr	3.9
	11Uhr	3.6	12Uhr	3.5	13Uhr	3.5
	14Uhr	3.8	15Uhr	2.4		
$\delta = -10^\circ$	6Uhr	1.4	7Uhr	4.5	8Uhr	4.8
	9Uhr	4.0	10Uhr	3.6	11Uhr	3.3
	12Uhr	3.2	13Uhr	3.1	14Uhr	<u>3.3</u>
	15Uhr	1.4				
$\delta = 10^\circ$	7Uhr	2.9	8Uhr	3.7	9Uhr	3.1
	10Uhr	2.7	11Uhr	2.5	12Uhr	2.2
	13Uhr	1.9	14Uhr	1.2		
$\delta = 20^\circ$	7Uhr	1.0	8Uhr	2.6	9Uhr	2.3
	10Uhr	2.0	11Uhr	1.7	12Uhr	1.3
	13Uhr	0.6				
$\delta = 23.5$	8Uhr	2.1	9Uhr	1.9	10Uhr	1.7
	11Uhr	1.4	12Uhr	0.9		

Zur Veranschaulichung dienen als Beispiele die beiden in den Tabellen auf den Seiten 32 und 35 fett gedruckten Werte. Sie geben die Längen der in Abb. 31 auf Seite 31 dick ausgeführten Strecken an.

Das dort abgebildete Zifferblatt wurde berechnet für $\varphi = 50^\circ$, $d = -20^\circ$, $i = 0$ und die Zeigerhöhe $Z = 1,5\text{cm}$.

4. Beleuchtungsdauer

4.1 Einleitung

(1) Problemstellung

Um den Betrachter nicht unnötig zu verwirren, sollten auf der Zifferblattebene einer ortsfesten Sonnenuhr nur die Stunden markiert werden, wenn die Uhr auch tatsächlich von der Sonne beschienen wird. Sie ändern sich im Jahresverlauf.

Die Aufgabe lautet also: Bestimme die längste Beleuchtungsdauer einer beliebig abweichenden und beliebig geneigten Zifferblattebene.

Offensichtlich ist dies für die Sonnendeklination $\delta = +23,5^\circ$ dann der Fall, wenn der Himmelsnordpol über der Zifferblattebene liegt. Befindet sich dagegen der Südpol über der Ebene, so tritt der früheste Aufgang und der späteste Untergang für die Sonnendeklination $\delta = -23,5^\circ$ ein.

(2) Erläuterung der Aufgabe an einem einfachen Beispiel

Bei einer nichtabweichenden vertikalen Süduhr liegt der Südpol über der Zifferblattebene und man erhält in unseren Breiten mit $\varphi = 50^\circ$ und $\delta = -23,5^\circ$ aus

$$\cos t_z = -\tan \psi \cdot \tan \delta, \text{ also } t_z = -111^\circ$$

für den Aufgang der Sonne über der Zifferblattebene. Hierin sei ψ der Winkel zwischen Zeiger und Substilar:

$$\sin \psi = \sin \varphi \cdot \sin i - \cos \varphi \cdot \cos i \cdot \cos d = -\cos \varphi$$

für $d = i = 0$.

Ohne nachzurechnen ist klar, dass die Sonne dann noch unter dem Horizont steht. Da der Nordpol über dem Horizont liegt, erhält man mit $\delta = +23,5^\circ$ aus $\cos t_H = -\tan \varphi \cdot \tan \delta$ $t_H = -121^\circ$ als frühesten Aufgangswinkel.

Für $\delta = -23,5^\circ$ erhält man $t_H = -59^\circ$ als spätesten Aufgangswinkel über dem Horizont.

Vergrößert man nun $\delta = -23,5^\circ$, so wird der Betrag von t_Z kleiner, jedoch der Betrag von t_H größer.

Aufgrund der speziellen Lage der Zifferblattebene ergibt sich natürlich für $\delta = 0$ der früheste Aufgang $t_Z = t_H = -90^\circ$.

Bei Abweichung der Uherebene um 20° gegen Osten ist die Zifferblattebene im Vorteil. Also muss ein für die Horizontebene günstigeres δ gewählt werden: frühester Aufgang über Horizont- und Zifferblattebene $t_H = t_Z = -106^\circ$ für $\delta = 13^\circ$.

(3) Verallgemeinerung der Problemstellung

In Innenhöfen, die von hohen Gebäuden umstellt sind, trifft man oft auf solche Zifferblätter, die Stundenlinien aufweisen für Zeiten, zu den die Uhrfläche überhaupt nicht beschienen sein kann. Aber auch sonst geht die Sonne häufig nicht in der Höhe $h=0$ auf, sondern erst später in einer bestimmten positiven Höhe $h>0$, da der Horizont durch Berge, Häuser usw. verdeckt ist.

Die Überlegungen und Berechnungen sind dann komplizierter. So müssen in tropischen Breiten extremale Auf- oder Untergangszeiten nicht bei extremalen Werten der Sonnendeklination eintreten.

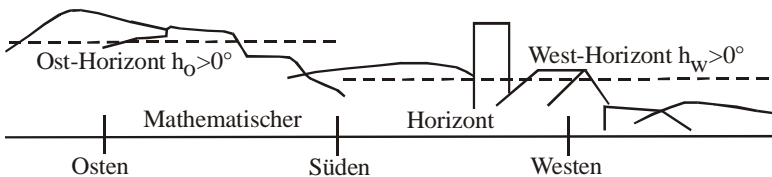


Abb. 37: Oft ist der mathematische Horizont verdeckt

4.2 Horizontebene

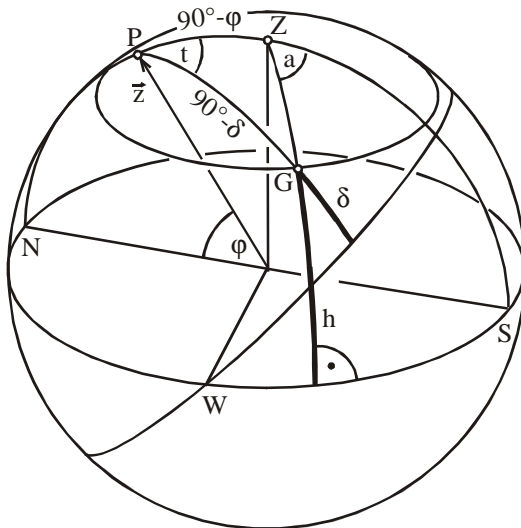


Abb. 38: Berechnung des Stundenwinkels t zu gegebener Höhe h

Für welchen Stundenwinkel t erreicht die Sonne die Höhe h über dem Horizont?

Aus dem Kosinussatz folgt die Auf- und Untergangsformel (vgl. Abb. 38):

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta} \quad \text{mit } -\varepsilon \leq \delta \leq \varepsilon = 23,45^\circ$$

und ε Schiefe der Ekliptik.

Für den Aufgang gilt $h=h_0$ und $-180^\circ \leq t \leq 0$,
für den Untergang $h=h_W$ und $0 \leq t \leq 180^\circ$.

(1) Wenn die Funktion

$t: \delta \longrightarrow t(\delta) = \arccos \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$ monoton ist, dann

ergeben sich Extremwerte für Randwerte der möglichen Sonnen-
deklinationen $\delta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ (Abb. 40.1):

frühester Aufgang bzw. spätester Untergang bei $\delta = \varepsilon \cdot \operatorname{sgn} \varphi$,

spätester Aufgang bzw. frühester Untergang bei $\delta = -\varepsilon \cdot \operatorname{sgn} \varphi$.

Definitionslücken:

a) Die Funktion $t: \delta \longrightarrow t(\delta)$ ist nur für

$$\left| \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta} \right| \leq 1 \text{ definiert.}$$

Durch Umformung folgt hieraus

$$\text{also } -90^\circ + |\varphi + h| \leq \delta \leq 90^\circ - |\varphi - h|,$$

Für die anderen Werte von δ , die auch innerhalb von $[-\varepsilon, \varepsilon]$ legen
können, geht die Sonne in der Höhe h nicht auf oder nicht unter:

$\delta \leq -90^\circ + |\varphi + h|$: kein Aufgang für $\varphi + h \geq 0$ mit $h = h_0$;

kein Untergang für $\varphi + h < 0$ mit $h = h_w$

$\delta \geq 90^\circ - |\varphi - h|$: kein Aufgang für $\varphi - h \leq 0$ mit $h = h_0$;

kein Untergang für $\varphi - h > 0$ mit $h = h_w$

b) Nenner gleich Null: $|\varphi| = 90^\circ$

Wenn $h_0 \geq \delta$ ist, dann geht die Sonne an diesem Tag erst bei $t=0$
auf, falls $h_w \leq \delta$ ist, oder sie geht überhaupt nicht auf, falls $h_w \geq \delta$
ist.

Wenn $h_0 \leq \delta$ ist, dann geht die Sonne an diesem Tag schon
bei $t=0$ unter, falls $h_w \geq \delta$ ist, oder sie geht überhaupt nicht unter,
falls $h_w \leq \delta$ ist.

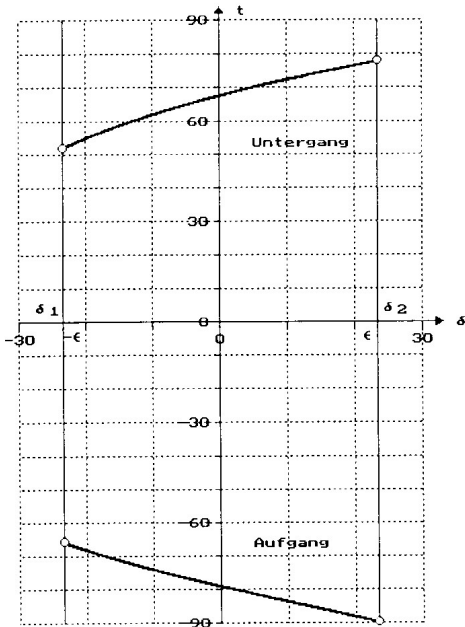


Abb. 40.1: Monotone Auf- und Untergangsfunktionen für

$$\varphi = 25^\circ$$

$$h_0 = 10^\circ$$

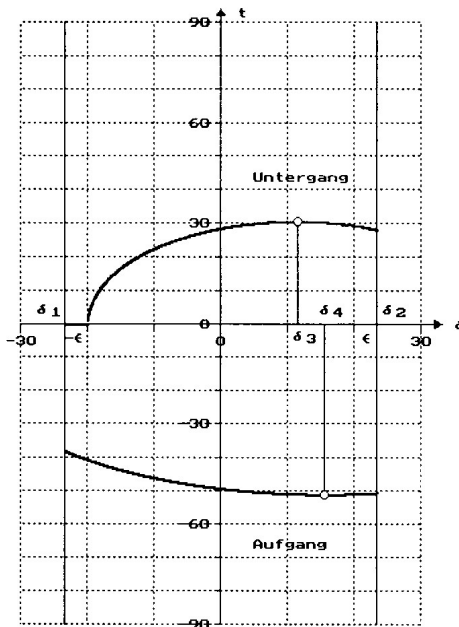
$$h_w = 20^\circ$$

Abb. 40.2: Auf- und Untergangsfunktionen sind nicht monoton für

$$\varphi = 10^\circ$$

$$h_0 = 40^\circ$$

$$h_w = 60^\circ$$



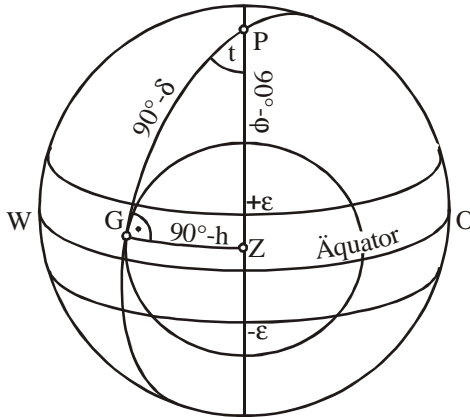


Abb. 41: Zu extremer Besonnungsdauer gehören nicht extreme Deklinationen

(2) Ist $t: \delta \longrightarrow t(\delta)$ nicht monoton (Abb. 40.2), so werden frühester Aufgang bzw. spätester Untergang nicht mehr auf dem Rand angenommen, sondern für ein δ_m mit

$$\sin \delta_m = \frac{\sin \varphi}{\sin h}$$

(Kosinussatz im rechtwinkligen Dreieck ZPG, Abb. 41).

Wegen der strengen Monotonie der Sinusfunktion zwischen -90° und $+90^\circ$, gibt es höchstens ein solches δ_m , wenn

$$\sin |\varphi| < \sin h, \text{ d.h. } |\varphi| < h \text{ ist.}$$

Der lokale Extremwert $t(\delta_m)$ tritt tatsächlich nur dann auf, wenn er für eine mögliche Sonnendeklination δ_m im Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[$ angenommen wird. Also muss außerdem gelten

$$|\sin \delta_m| = \left| \frac{\sin \varphi}{\sin h} \right| < \sin \varepsilon \Leftrightarrow \sin |\varphi| < \sin \varepsilon \cdot \sin h$$

und daraus folgt nicht nur

$$|\varphi| < h, \text{ sondern auch } |\varphi| < \varepsilon.$$

In den Tropen findet frühester Aufgang bzw. spätester Untergang, falls der Pol genügend weit unter dem Höhenkreis des tatsächlichen Horizonts liegt, nicht bei Randwerten $\delta = \pm \varepsilon \cdot \sin \varphi$ der Sonnendeklination statt, sondern bei einer Deklination δ_m und einem Stundenwinkel mit

$$\sin \delta_m = \frac{\sin \varphi}{\sin h} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{\cosh}{\cos \varphi}$$

wobei $h=h_0$ und $t < 0$ für den frühesten Aufgang bzw. $h=h_w$ und $t > 0$ für den spätesten Untergang ist (Sinussatz im rechtwinkligen Dreieck ZPG, Abb. 41).

Beispiel: Lima $\varphi = -12^\circ$
 Untergang in der Höhe $h = 50^\circ$
 $t(\varepsilon) = 40,4^\circ$
 $t(\delta_m) = 41,1^\circ$ für $\delta_m = -15,7^\circ$

Die Differenz ist hier zwar nur $0,7^\circ$, am Äquator für $\varphi = 0$ und $h = 90^\circ - \varepsilon$ nimmt sie aber ihren Maximalwert ε an, denn $t(\varepsilon) = 0$ und $t(\delta_m) = \varepsilon$ für $\delta_m = 0$.

Definitionslücken:

a) Für $h = 0$ ist $\sin |\varphi| < \sin \varepsilon \cdot \sin h$ nur für $\varphi = 0$ erfüllt: $t = \pm 90^\circ$ für spätesten Untergang bzw. frühesten Aufgang. Auf- und Untergangszeiten in der Höhe $h = 0$ sind am Äquator unabhängig von δ , da $t: \delta \longrightarrow t(\delta)$ konstant ist.

Für $\varphi \neq 0$ ist $t: \delta \longrightarrow t(\delta)$ für $h = 0$ streng monoton.

Für $h = 90^\circ$ ist $\sin t = 0$, also $t = 0$: kein Aufgang.

Für $0 < h < 90^\circ$ folgt aus $\sin |\varphi| < \sin \varepsilon \cdot \sin h$:

$$|\varphi| < \varepsilon < 90^\circ, \text{ also } \cos \varphi \neq 0 \text{ und } |\varphi| < h < 90^\circ, \text{ also } \frac{\cosh}{\cos \varphi} < 1,$$

$$\text{d.h. } t = \arcsin \frac{\cosh}{\cos \varphi} \quad \text{und} \quad \delta_m = \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sin h} \quad \text{sind definiert}$$

und der Extremwert wird nicht am Rand angenommen, sondern bei δ_m .

b) Ist $|\varphi| \geq h$, so ist $t: \delta \longrightarrow t(\delta)$ monoton. Für $|\varphi| < h$ gibt es ein lokales Extremum in

$] -90^\circ, 90^\circ [$, das aber für $|\sin \varphi| \geq \sin \varepsilon \cdot \sin h$ außerhalb von $] -\varepsilon, \varepsilon [$ liegt. Also gibt es nicht nur für $|\varphi| \geq h$ bloß Randextremwerte, sondern sogar für $|\sin \varphi| \geq \sin \varepsilon \cdot \sin h$. Es gilt z.B. für $\varphi = 20^\circ < h = 30^\circ$:

$$\sin |\varphi| = 0,34 \geq \sin \varepsilon \cdot \sin 30^\circ = 0,20$$

und $\delta_m = \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sin h} = 43^\circ$ liegt außerhalb von $] -\varepsilon, \varepsilon [$.

4.3 Zifferblattebene

Für welchen Stundenwinkel t geht die Sonne über der Zifferblattebene auf bzw. unter, wenn man sich die Erde durchsichtig vorstellt? Wir berechnen nach der Auf- und Untergangsformel im System der Zifferblattebene

$$\cos t' = \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta} \quad \text{mit } \varphi = \psi \text{ und } h = 0,$$

$$\text{also } \cos t' = -\frac{\sin \psi \cdot \sin \delta}{\cos \psi \cdot \cos \delta}$$

und $-180^\circ \leq t' \leq 0$ für den Aufgang
bzw. $0 \leq t' \leq 180^\circ$ für den Untergang

Der späteste Untergang bzw. der früheste Aufgang findet bei $\delta = \varepsilon \cdot \operatorname{sgn} \psi$ statt.

Beispiel:

Vertikale Süduhr: $d=0, i=0$. Nach Seite 27 ist $\sin \psi = -\cos \varphi$, also $\psi = \varphi - 90^\circ \leq 0$. Ohne Obstruktion durch die Horizontebene würde die extremale Besonnungsdauer auf dem Zifferblatt für $\delta = \varepsilon \cdot \operatorname{sgn} \psi = -23,44^\circ$ zur Wintersonnenwende eintreten.

Aus diesen Zeiten erhält man den frühesten und spätesten Auf- bzw. Untergang über der Zifferblattebene im Koordinatensystem der Horizontebene jeweils durch Addition der Substilarzeit τ .
 spätester Untergang / frühester Aufgang:

$$t = \pm \arccos\left(\frac{-\sin|\psi| \cdot \sin \varepsilon}{\cos \psi \cdot \cos \varepsilon}\right) + \tau$$

Liegt t nicht im Intervall $[-180^\circ, +180^\circ]$, so sind 360° zu addieren oder zu subtrahieren.

Die Auf- und Untergangsfunktion

$t: \delta \longrightarrow t(\delta) = \arccos\left(\frac{-\sin|\psi| \cdot \sin \delta}{\cos \psi \cdot \cos \delta}\right) + \tau$ ist wegen $h=0$ für alle ψ monoton, für $\psi \neq 0$ sogar streng monoton.

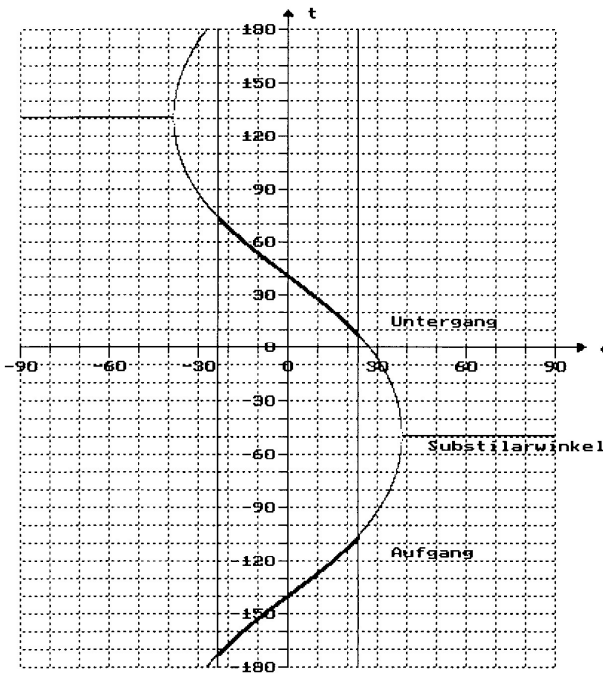


Abb. 44:
 Die Auf- und Untergangsfunktionen für die Zifferblattebene sind immer monoton

$$\begin{aligned} \varphi &= 50^\circ \\ d &= -30^\circ \\ i &= -20^\circ \end{aligned}$$

Definitionslücken

a) Nenner gleich Null?

Es wird $|\delta| \leq \varepsilon = 23,5^\circ$ vorausgesetzt, also ist $|\delta| < 90^\circ$, d.h. $\cos\delta$ kann nicht gleich Null sein. Für $|\psi| = 90^\circ$ ist das Zifferblatt parallel zur Äquatorebene und die Sonne ist den ganzen Tag über oder in der Zifferblattebene, falls $\text{sgn}\psi \cdot \text{sgn}\delta \geq 0$ ist. Für die anderen Werte von δ ist die Sonne den ganzen Tag unter der Zifferblattebene.

b) Die Funktion $t: \delta \longrightarrow t(\delta)$ ist nur definiert für

$$\left| \frac{\sin \psi \cdot \sin \delta}{\cos \psi \cdot \cos \delta} \right| \leq 1, \text{ was für } \psi = 0 \text{ unabhängig von } \delta \text{ der Fall ist,}$$

also $t = 90^\circ + \tau$ für den Untergang und $t = -90^\circ + \tau$ für den Aufgang.

Für $\psi \neq 0$ folgt durch Umformung hieraus wie bei der Horizontebene $-90^\circ + |\psi| \leq \delta \leq 90^\circ - |\psi|$.

Für die anderen Werte von δ geht die Sonne über der Zifferblattebene nicht auf oder nicht unter. Gleichheit kann ebenfalls zugelassen werden, da die Sonnenbahn für solche δ die Zifferblattebene nur in einem Punkt von oben oder unten berührt.

$$\begin{aligned} \delta \leq -90^\circ + |\psi| &: \text{kein Aufgang für } \psi > 0, \\ &\text{kein Untergang für } \psi < 0 \\ \delta \geq 90^\circ - |\psi| &: \text{kein Aufgang für } \psi < 0, \\ &\text{kein Untergang für } \psi > 0 \end{aligned}$$

4.4 Schnittstellen der Funktionen für Horizont und Zifferblattebene

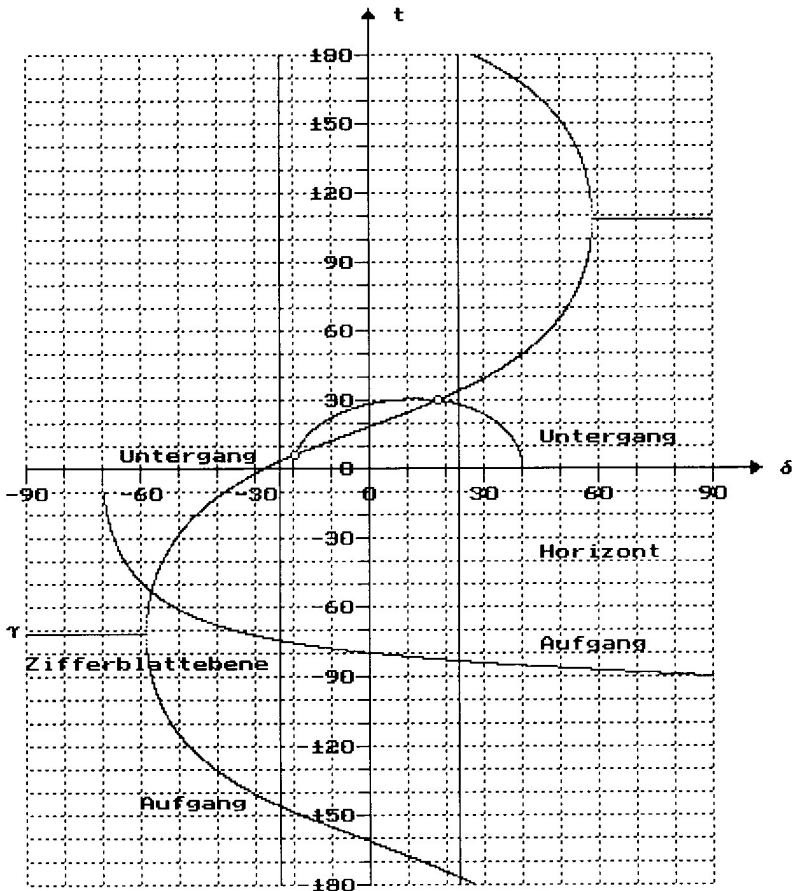


Abb. 46: Schnittpunkte auf der gleichen Meridianseite

geogr. Breite	$\varphi = 10^\circ$	Charakteristische Winkel
Deklination	$d = -120^\circ$	$\psi = 31^\circ$
Inklination	$i = 21^\circ$	$\sigma = -91^\circ$
Horizont Ost	$h_o = 10^\circ$	$\tau = -71^\circ$
Horizont West	$h_w = 60^\circ$	Aufgang
		$t_A = -83,4^\circ$
		Untergang
		$t_U = 29,9^\circ$

Die Auf- und Untergangsfunktion kann Extremwerte nicht nur bei den extremen Sonnendeklinationen $\delta = -\varepsilon$ und $\delta_2 = +\varepsilon$ annehmen wie in Abb. 40.1, sondern auch bei höchstens zwei weiteren Werten δ_3 und δ_4 für Aufgang bzw. Untergang zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, falls die Funktion nicht monoton ist wie in Abb. 40.2.

Zusätzlich können Extremwerte aber auch noch auftreten bei Schnittstellen der Beleuchtungsfunktionen für Horizont- und Zifferblattebene. Die Sonne geht bei diesen Deklinationen δ_5 und δ_6 zur gleichen Zeit über dem Horizont in der Höhe h und der Zifferblattebene auf oder unter. Es kann höchstens zwei solcher Schnittstellen geben, die auch auf der gleichen Seite des Meridians liegen können, falls keine Monotonie vorliegt (Abb. 46). Mehr als zwei Schnittpunkte sind nicht möglich, weil die Zifferblattebene jeden Höhenkreis in höchstens zwei Punkten schneidet, die sich bei $h=0$ im Azimut um 180° unterscheiden, bei $h>0$ aber enger zusammen liegen.

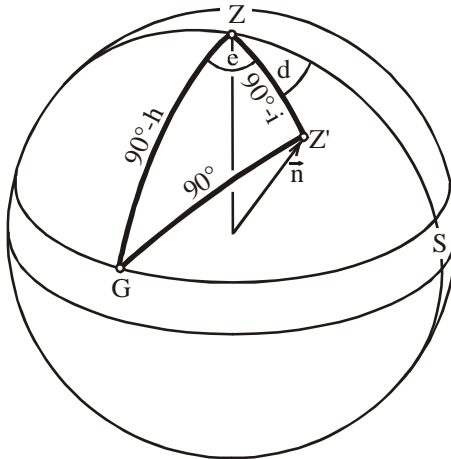


Abb. 47: Gleichzeitiger Aufgang oder Untergang über Horizont und Zifferblatt

Wir berechnen die Deklinationen δ_5 und δ_6 , bei denen Auf- oder Untergang über dem Horizont in der Höhe h und Auf- oder Untergang über der Zifferblattebene gleichzeitig stattfinden.

Aus der Zeichnung (Abb. 48) entnimmt man:

$$\cos e = -\frac{\sin i \cdot \sin h}{\cos i \cdot \cos h} \quad \text{mit } 0^\circ \leq e \leq 180^\circ$$

Azimut $a = d \pm e$

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin h - \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos a$$

Liegt a nicht im Intervall $]-180^\circ, 180^\circ]$, so sind 360° zu addieren oder zu subtrahieren. Negative Werte von a gelten für den Aufgang, sind also nur dann sinnvoll, wenn e mit $h=h_0$ berechnet wurde. Entsprechend sind positive Werte von a nur sinnvoll, wenn sie mit $h=h_W$ berechnet wurden. So bleiben von den an sich vier Möglichkeiten, nämlich zwei für e für $h=h_0$ oder $h=h_W$ und dazu jeweils wieder zwei für $a=d+e$ und $a=d-e$ höchstens die zwei übrig, bei denen das Vorzeichen von a zur verwendeten Horizonthöhe im Osten oder Westen passt. Es ist zu beachten, dass bei Addition und Subtraktion von e zwei Azimutwerte mit gleichem Vorzeichen auftreten können. Dann findet entweder der Aufgang oder der Untergang über dem Horizont in der Höhe h_0 bzw. h_W und der Zifferblattebene zweimal im Jahr gleichzeitig statt (siehe Abb.46).

Mit dem berechneten Wert für δ ergibt sich der Stundenwinkel t aus der Gleichung

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

und t hat das gleiche Vorzeichen wie a .

Definitionslücken

a) e lässt sich nur bestimmen, falls $|\tan i \cdot \tan h| \leq 1$ ist,

d.h. wenn $\tan|i| \leq \frac{1}{\tan h} = \tan(90^\circ - h)$ mit $0 \leq h \leq 90^\circ$ ist, also

$$|i| \leq 90^\circ - h \Leftrightarrow h - 90^\circ \leq i \leq 90^\circ - h.$$

Beim Aufgang war $i \geq h - 90^\circ$ Voraussetzung.

Wenn $i \leq h - 90^\circ$ ist, dann liegt der Höhenkreis h ganz über der nach unten gekehrten Zifferblattebene und es tritt überhaupt keine Besonnung ein und es gibt somit auch keine Schnittstellen mit gleichzeitigem Auf- oder Untergang über Horizont in der Höhe h und Zifferblatt.

Für $i \geq 90^\circ - h$ liegt der Höhenkreis ganz über der nach oben gewandten Zifferblattebene und die Beleuchtungsdauer hängt nur vom Auf- und Untergang über dem Horizont in der Höhe h ab. Es gibt keine Schnittstellen mit gemeinsamem Auf- oder Untergang.

b) Nenner gleich Null?

$i = 90^\circ$: dann ist $i \geq 90^\circ - h$, keine Schnittstellen wie oben

$i = -90^\circ$: dann ist $i \leq h - 90^\circ$, keine Schnittstellen wie oben

$h = 90^\circ$: überhaupt keine Besonnung, keine Schnittstellen

$|\delta| = 90^\circ$: nicht möglich, da $|\delta| \leq \varepsilon = 23,5^\circ$

$|\varphi| = 90^\circ$: wenn $h \geq \varepsilon$, dann kein Aufgang,

keine Schnittstellen

wenn $\varepsilon < h$, dann kein Untergang bez. Horizont

die Beleuchtungsdauer hängt nur vom Zifferblatt

ab, also keine Schnittstellen

Beispiel: (vgl. Abb. 46)

Gegeben seien $\varphi = 10^\circ$, $d = -120^\circ$, $i = 21^\circ$ und die Horisonthöhe im Westen $h_w = 60^\circ$.

Man berechnet daraus $e = 132^\circ$ und das

Azimut $a = d + e = 12^\circ$ oder $a = d - e = \text{intervall}(-252^\circ) = 108^\circ$.

Beide Azimutwerte sind positiv und damit für den Westhorizont sinnvoll. Für die Funktion *intervall* siehe Seite 51.

4.5 Durchschnitt der Beleuchtungsintervalle

Für jede der 6 Deklinationen δ_1 bis δ_6 berechnen wir die Auf- und Untergangszeiten $a_h = -t(\delta_i)$ mit $h = h_0$ und $u_h = t(\delta_i)$ mit $h = h_w$ bezüglich Horizont sowie $a_z = -t(\delta_i) + \tau$ und $u_z = t(\delta_i) + \tau$ mit $h = 0$ und $\varphi = \psi$ bezüglich Zifferblattebene. Aus den beiden Beleuchtungsintervallen $[a_h, u_h]$ und $[a_z, u_z]$ wird die gemeinsame Beleuchtungsdauer $[a_i, u_i]$ für $i=1, \dots, 6$ als Durchschnitt gebildet. Es sind 6 Fälle möglich, die zusammen mit den Bedingungen, unter denen sie eintreten

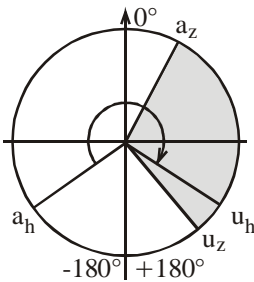


Abb. 50.1

$$[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = [a_z, u_h],$$

falls $a_h \leq a_z \leq u_h \leq u_z$ oder $u_z < a_h \leq a_z \leq u_h$

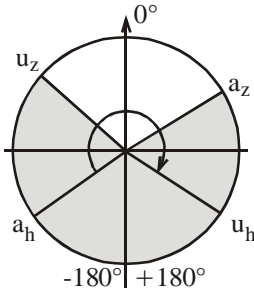


Abb. 50.2

$$[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = [a_z, u_h] \cup [a_h, u_z],$$

falls $a_h \leq u_z < a_z \leq u_h$

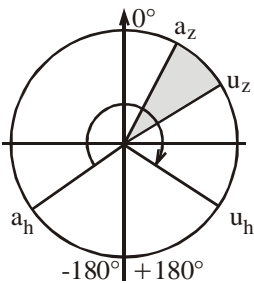


Abb. 50.3

$$[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = [a_z, u_z],$$

falls $a_h \leq a_z \leq u_z < u_h$

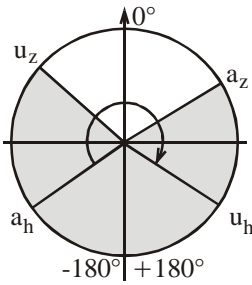


Abb. 51.1

$$[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = [a_h, u_z],$$

falls $a_h \leq u_z \leq u_h < a_z$ oder $a_z < a_h \leq u_z \leq u_h$

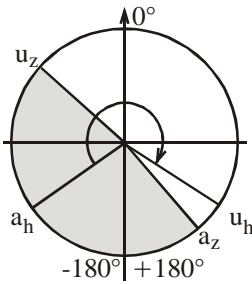


Abb. 51.2

$$[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = [a_h, u_h],$$

falls $u_h < u_z < a_z$ oder $(u_h < u_z$ und $a_z < a_h)$
oder $u_z < a_z < a_h$

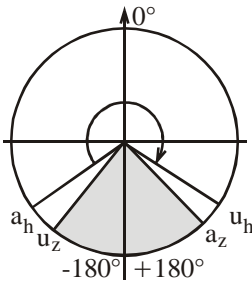


Abb. 51.3

$$[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = \{ \},$$

falls $u_h < a_z \leq u_z$ oder $(u_z < a_h$ und $u_h < a_z)$
oder $a_z \leq u_z < a_h$

Zu einer Abbildung können mehrere Fälle gehören wegen des Sprungs von $+180^\circ$ auf -180° . Liegt a_z zwischen a_h und u_h , so gilt $a_h < a_z < u_h$. Liegt a_z aber zwischen u_h und a_h , so kann dies bedeuten $u_h < a_z (\leq 180^\circ)$ oder $(-180^\circ \leq) a_z < a_h$, wobei die eingeklammerten Ungleichungen entfallen können, da alle Winkel immer mit der Funktion Intervall ins Intervall $[-180^\circ, +180^\circ]$ gebracht werden.

```
function intervall(x:real):real;
begin if x>180 then intervall:=x-360;
      if x<-180 then intervall:=x+360; end;
```

So gehören z.B. zur Abb. 51.2 außer der abgebildeten Möglichkeit $u_h \leq u_z < a_z$ noch die Möglichkeiten ($u_h \leq u_z$ und $a_z \leq a_h$) wie in Abb. 52.1 oder ($u_z < a_z$ und $a_z \leq a_h$) wie in Abb. 52.2, die beide ebenfalls zum Ergebnis $[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = [a_h, u_h]$ führen.

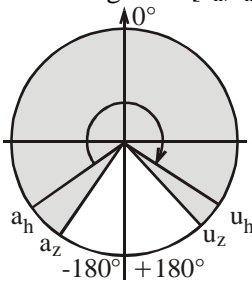


Abb. 52.1

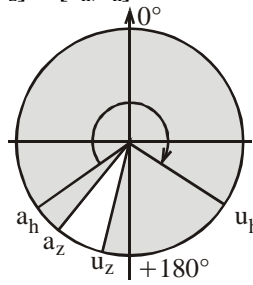
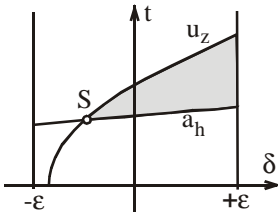
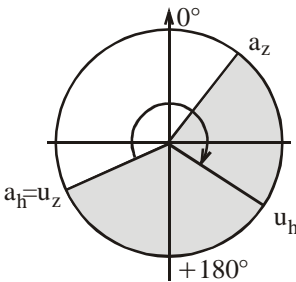


Abb. 52.2

Zwischen $<$ und \leq ist genau zu unterscheiden. Auch Punkte, in denen Auf- und Untergang zusammenfallen, sind für den Vergleich wichtig. In der folgenden Abbildung geht die Sonne in S über dem Horizont auf und gleichzeitig bezüglich der Zifferblattebene unter: $u_z = a_h$. Ohne Punkt S könnte der früheste Aufgang nicht angegeben werden.



Die Abfrage: „wenn $u_z = a_h$, dann...“ kann scheitern, da die beiden Werte wegen der unsauberen Arithmetik des PC innerhalb der Rechengenauigkeit voneinander abweichen können. Man müsste fragen, ob $abs(u_z - a_h) < ge$ ist, wobei ge einen kleinen positiven Fehler bedeute. Allerdings nähme man dann in Kauf, dass Werte, die prinzipiell verschieden sind, als gleich betrachtet würden.



Andererseits dürfen durch \leq nicht zwei Intervalle entstehen, wenn es tatsächlich nur eines gibt. In der Abb. 50.1 darf nicht überall das Gleichheitszeichen stehen, denn für $u_z = a_h$ wie in Abb. 52.2 würde das Beleuchtungsintervall in zwei Teilintervalle zerfallen und zutreffend wäre dann die Situation wie in Abb. 50.2: $[a_h, u_h] \cap [a_z, u_z] = [a_h, u_z] \cup [a_z, u_h]$.

4.6 Extremale Beleuchtungsdauer

Unter denjenigen der 6 Werte a_i und u_i , wenn die Sonne sowohl über dem Horizont als auch über dem Zifferblatt ist, wird der kleinste $t_A = \min a_i$ und der größte $t_U = \max u_i$ ermittelt, woraus sich die längste Beleuchtungsdauer $[t_A, t_U]$ ergibt.

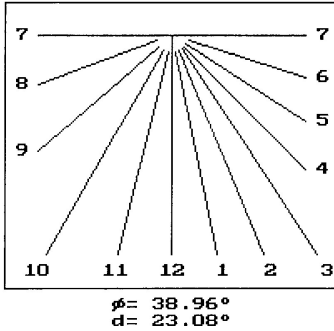
Zerfällt die gemeinsame Beleuchtungsdauer in 2 Teilintervalle $[a_i, u_i]$ und $[a'_i, u'_i]$ (Abb. 50.2), so ist die Suche nach dem Maximum bzw. Minimum unter den Werten a'_i bzw. u'_i gesondert durchzuführen: $t'_A = \min a'_i$ und $t'_U = \max u'_i$. Dabei gehört die gemeinsame Beleuchtungsdauer $[a_i, u_i]$ bzw. $[a'_i, u'_i]$ zum einen der Teilintervalle, falls $u_i < \tau - 180^\circ$ und zum andern Teilintervall, falls $a'_i > \tau - 180^\circ$ ist.

Die extremale Beleuchtungsdauer besteht dann ebenfalls aus zwei Teilintervallen. Man erhält sie als Vereinigung $[t_A, t_U] \cup [t'_A, t'_U]$.

Ergeben sich jedoch zwei Teilintervalle mit nichtleerem Durchschnitt $[t_A, t_U] \cap [t'_A, t'_U] \neq \{\}$, so wird daraus ein einziges $[t^*_A, t^*_U]$ gebildet mit $t^*_A = \min \{t_A, t'_A\}$ und $t^*_U = \max \{t_U, t'_U\}$.

Beispiel 1:

Ansbach $\varphi=49,3^\circ$, Behringershof, vertikale Süduhr am Turm im Innenhof: $d=i=0$. Auffällig ist, dass das Zifferblatt nur wenige Stundenlinien trägt. Der Grund dafür sind die den Innenhof umschließenden Gebäude, die eine große Horzonthöhe $h_0=h_w=45^\circ$ verursachen.



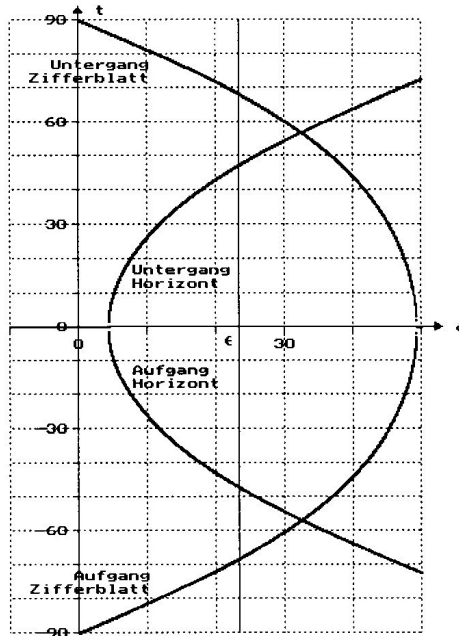
Horizont: Da $\varphi < 0$ ist, tritt das Randmaximum $a_h = -47,3^\circ$ und $u_h = 47,3^\circ$ bei $\varepsilon = 23,4^\circ$ auf. Da $\varphi > \varepsilon$ ist, gibt es keine lokalen Extrema.

Zifferblatt: $\psi = -40,7^\circ$, Randmaximum $a_z = -111,9^\circ$, $u_z = 111,9^\circ$ bei

$\varepsilon = -23,4^\circ$; Randminimum $a_z = -64,4^\circ$, $u_z = 64,4^\circ$ bei $\varepsilon = 23,4^\circ$.

Schnittpunkt: $e = 90^\circ$, Azimut $a = d + e = 90^\circ$ oder $a = d - e = -90^\circ$, Deklination $\delta = 32,4 > \varepsilon$ außerhalb.

Wegen der unterschiedlichen Monotonie der Beleuchtungsfunktionen wird für kleinere d die Beleuchtungsdauer für den Horizont kleiner und für das Zifferblatt größer. Die extremale gemeinsame Beleuchtungsdauer fällt mit der extremalen Beleuchtungsdauer der Horizontebene zusammen wegen der sehr kleinen Beleuchtungsdauer des Horizonts aufgrund der großen Horzonthöhen.



Beispiel 2: Gegeben sei eine überhängende Norduhr in Würzburg mit $\varphi=50^\circ$, $d=160^\circ$, $i=-50^\circ$, $h_0=0$, $h_W=20^\circ$.
Es ist $\tau=167^\circ$.

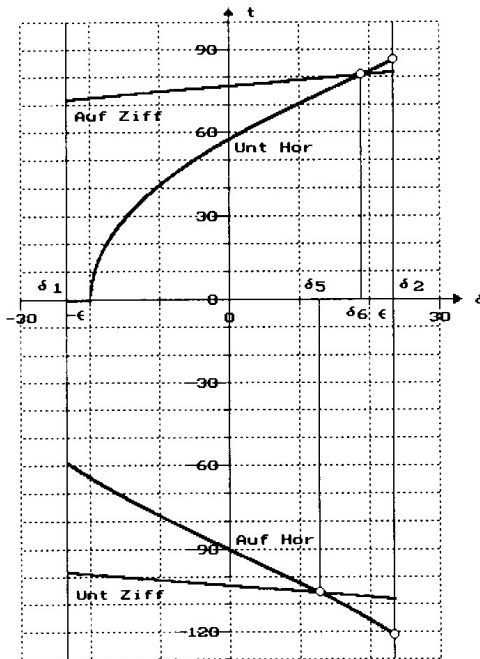


Abb. 55: Zwei Intervalle

(i) Randwerte:

Für $\delta_1=-23.5^\circ$ ergibt sich $a_h=-59^\circ$, $u_h=0$ und $a_z=72^\circ$, $u_z=-98^\circ$.

Es ist $u_z < a_h < u_h < a_z$, also gilt die 2. Möglichkeit in Abb. 51.3

mit $[a_1, u_1]=\{ \}$. Wir setzen $a_1=180^\circ$, $u_1=-180^\circ$.

Für $\delta_2=+23.5^\circ$ ergibt sich für den Horizont $a_h=-121^\circ$, $u_h=86^\circ$ und für das Zifferblatt $a_z=82^\circ$, $u_z=-108^\circ$.

Es ist $a_h < u_z < a_z < u_h$, also 2 Intervalle nach Abb. 50.2 mit

mit $a_2 = 82^\circ$, $u_2 = 86^\circ$

und $a'_2=-121^\circ$, $u'_2=-108^\circ$.

(ii) Extremwerte:

Sowohl für $h=h_0=0$ als auch für $h=h_w=20^\circ$ ist $\sin\varphi > \sin\varepsilon \cdot \sinh$, also gibt es keine lokalen Extremstellen.

Wir setzen $a_3=a_4=180^\circ$ und $u_3=u_4=-180^\circ$.

(iii) Schnittpunkte:

Im Osten für $\delta_5=12,7^\circ$ ist $a_h=u_z=-106^\circ$, $u_h=74^\circ$, $a_z=80^\circ$.

Es ist $a_h=u_z < u_h < a_z$, also gilt die 1. Möglichkeit in Abb. 51.1 mit $a_5=u_5=-106^\circ$. Da jedoch $a_5 < \tau-180^\circ=-13^\circ$ ist, gehören diese Winkel zum 2. Teilintervall, also $a'_5=u'_5=-106^\circ$.

Im Westen für $\delta_6=18,8^\circ$ ist $a_h=-114^\circ$, $u_h=a_z=81^\circ$, $u_z=-107^\circ$. Es ist $a_h < u_z < a_z = u_h$, also 2 Intervalle nach Abb. 50.2 mit $a_6=u_6=81^\circ$ und $a'_6=-114^\circ$, $u'_6=-107^\circ$.

(iv) Extremale Beleuchtungsdauer: $t_A = \min a_i = 81^\circ$, $t_U = \max u_i = 86^\circ$,
 $t'_A = \min a'_i = -121^\circ$,

$t'_U = \max u'_i = -106^\circ$, also

$$[t_A, t_U] \cup [t'_A, t'_U] = [81^\circ, 86^\circ] \cup [-121^\circ, -106^\circ].$$

4.7 Refraktion

Sonnenuhren werden im Allgemeinen für eine punktförmige Sonne und ohne Refraktion konstruiert. Die Refraktion ist in Horizontnähe am größten und beträgt dort ca. $0,6^\circ$, nimmt aber mit wachsender Höhe sehr rasch ab. Bei Berechnung des Auf- oder Untergangs ist nicht $h=0$ zu verwenden, sondern $h=-0,6^\circ$. Tatsächlich steht der Sonnenmittelpunkt dann unter dem Horizont. Die Besonnung beginnt oder endet jedoch, wenn der obere Rand der Sonne, die einen scheinbaren Durchmesser von ca. $0,5^\circ$ hat, den Horizont erreicht. Beide Effekte zusammen bewirken, dass die beobachteten Auf- und Untergangszeiten in mittleren Breiten von den berechneten bis zu 3 Minuten abweichen und am Äquator bis zu 5 Minuten.

Die Refraktion hängt außer von der Höhe des Gestirns auch von Luftdruck und Temperatur ab. Obwohl diese sich im Laufe eines Jahres ändern, kann die folgende Formel für 10° C und 1010 hPa mit guter Näherung verwendet werden. Selbst in Horizontnähe und unter anderen gängigen klimatischen Bedingungen gibt sie die Refraktion R in Grad mit einem Fehler von unter 0,03° an in Abhängigkeit von der beobachteten Höhe h':

$$R = 0,0167 \cdot \cot\left(h' + \frac{7}{h'+4,3}\right)$$

Einfluss der Refraktion auf die Zeitangabe der Sonnenuhr:

Die Refraktion hebt die Sonne auf dem Vertikal um den Betrag R an. Der durch die Refraktion bedingte Fehler Δt kann mit den folgenden Formeln berechnet werden:

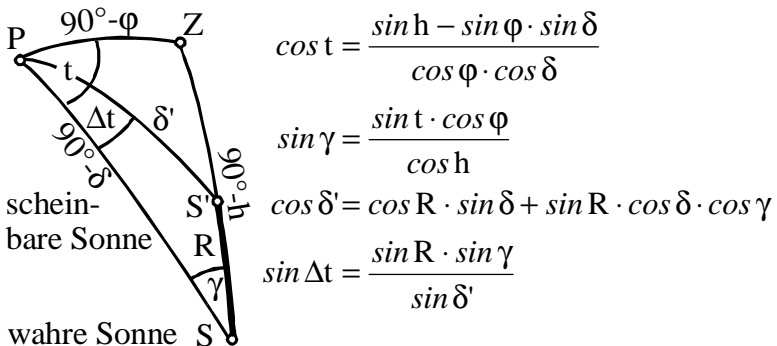


Abb. 57: Refraktion

Beispiel: $\varphi=50^\circ$; $\delta=23,4^\circ$:

a) Beim Untergang mit $h'=0$ ist die Refraktion $R=0,59^\circ$, also die Höhe der wahren Sonne $h=-0,59^\circ$. Der Fehler beträgt $\Delta t=0,35^\circ=1,4\text{min}$.

b) Mit zunehmender Höhe nimmt der Fehler rasch ab. Schon für $h'=10^\circ$ ist die Refraktion $R=0,09^\circ$ und der Fehler nur noch $\Delta t=0,06^\circ=0,2\text{min}$.

5. Gleichungen der Deklinationslinien

5.1 Kegelschnitte

Die von der Sonne über die Spitze des Schattenzeigers streifenden Lichtstrahlen beschreiben im Tagesverlauf einen Doppelkegel, dessen Achse parallel zur Polrichtung verläuft und dessen Öffnungswinkel sich mit der Deklination der Sonne ändert.

Die Datumslinien entstehen durch den Schnitt der Mantelfläche dieses Strahlenkegels mit der Zifferblattebene. Geometrisch handelt es sich bei den Datumslinien also um Kegelschnitte: Hyperbel, Parabel, Ellipse, Kreis.

Für Sonnendeklinationen, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, ergibt sich derselbe Doppelkegel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es daher, nur nichtnegative Deklinationen zu betrachten.

Die geometrische Situation ist vollständig beschrieben durch die Gestalt des Kegels und die Lage der Ebene zum Kegel. Die Gestalt des Drehkegels ist gegeben durch seinen halben Öffnungswinkel $90^\circ - \delta$; die Lage der Ebene ist gegeben durch den Winkel zwischen Kegelachse und Ebene und den Abstand der Kegelspitze von der Ebene. Da die Kegelachse zum Nordpol weist, ist der Winkel zwischen Achse und Ebene gleich dem Winkel ψ zwischen dem Schattenzeiger und seiner orthogonalen Projektion in die Zifferblattebene, der Substilare. Der Abstand der Kegelspitze ist der Abstand des schattenwerfenden Punktes von der Zifferblattebene, also die Zeigerhöhe Z .

Charakteristisch für das Zifferblatt sind drei Winkel, nämlich der Winkel ψ zwischen Zeiger und Substilare, der Winkel σ zwischen Gegenrichtung zur Falllinie und Substilare und der Stundenwinkel τ der Sonne, für den der Schatten auf die Substilare fällt.

Wie in 3.4 beschrieben wurde, gilt für diese Winkel:

Winkel ψ mit $-90^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ zwischen Zeiger und Substilare:

$$\sin \psi = \sin \varphi \cdot \sin i - \cos \varphi \cdot \cos i \cdot \cos d$$

Winkel σ mit $-180^\circ \leq \sigma \leq 180^\circ$ zwischen Gegenrichtung zur Falllinie und Substilare:

$$\sin \sigma \cdot \cos \psi = \pm \cos \varphi \cdot \sin d$$

$$\cos \sigma \cdot \cos \psi = \pm (\sin \varphi \cdot \cos i + \cos \varphi \cdot \sin i \cdot \cos d)$$

Für $\psi \geq 0$ gilt das positive Vorzeichen, für $\psi < 0$ das negative.

Stundenwinkel τ mit $-180^\circ \leq \tau \leq 180^\circ$, für den der Schatten auf die Substilare fällt:

$$\sin \tau \cdot \cos \psi = \cos i \cdot \sin d$$

$$\cos \tau \cdot \cos \psi = \sin i \cdot \cos \varphi + \cos i \cdot \sin \varphi \cdot \cos d$$

Für Winkel α , deren Beträge größer als 90° sein können, werden zwei trigonometrische Funktionen $x = \cos \alpha$ und $y = \sin \alpha$ angegeben. Daraus lässt sich der Winkel α eindeutig bestimmen, etwa mit der Funktion $\text{atn}(x, y)$ über den halben Winkel:

$$\alpha = \text{atn}(x, y) = \begin{cases} 180^\circ & \text{für } x = -1 \\ 2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) & \text{für } x \neq -1 \end{cases}$$

Aus der Symmetrie der Kegelschnitte folgt, dass die Hauptachse auf der Substilaren liegt, also um den Winkel σ gegen die Falllinie gedreht ist und dass die Nebenachse parallel zur Äquinoktiallinie ist, die senkrecht zur Substilare verläuft.

Um mit der einfacheren Mittelpunktsleichung der Kegelschnitte auszukommen, wird das zugrunde liegende Koordinatensystem den geometrischen Gegebenheiten angepasst. Der Pol oder Koordinatenursprung liegt im Mittelpunkt bzw. Brennpunkt des Kegelschnitts, die Polar- oder x-Achse liegt auf der Substilaren.

Eine einfache punktweise Parameterdarstellung wurde bereits in Teil 3.7 behandelt.

(1) Hauptachse

$$\overline{HB} = Z \cdot \tan(\psi - \delta),$$

$$\overline{HA} = Z \cdot \tan(180^\circ - \psi - \delta) = -Z \cdot \tan(\psi + \delta)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{HA} + \overline{HB}| = \frac{Z}{2} \cdot |\tan(\psi - \delta) - \tan(\psi + \delta)| = \\ &= \frac{Z}{2} \cdot \left| \frac{-2 \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta}{\cos^2 \delta - \sin^2 \psi} \right| = \left| \frac{-Z \cdot \sin 2\delta}{\cos 2\psi + \cos 2\delta} \right| \end{aligned}$$

(2) Nebenachse

Zweiter Strahlensatz von A aus: $\frac{q_1}{2r_1} = \frac{a}{2a} \Rightarrow q_1 = r_1,$

von B aus: $\frac{q_2}{2r_2} = \frac{a}{2a} \Rightarrow q_2 = r_2$

$$s_1 = \sqrt{Z^2 + \overline{HB}^2} = Z \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\psi - \delta)} = \frac{Z}{\cos(\psi - \delta)},$$

$$s_2 = \sqrt{Z^2 + \overline{HA}^2} = Z \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\psi + \delta)} = \frac{Z}{\cos(\psi + \delta)}$$

$$r_1 = s_1 \cdot \sin(90^\circ - \delta) = \frac{Z \cdot \cos \delta}{\cos(\psi - \delta)},$$

$$r_2 = s_2 \cdot \sin(90^\circ - \delta) = \frac{Z \cdot \cos \delta}{\cos(\psi + \delta)}$$

Höhensatz $b^2 = q_1 \cdot q_2$, also

$$\begin{aligned}
 b &= \sqrt{r_1 \cdot r_2} = \frac{Z \cdot \cos \delta}{\sqrt{|\cos(\psi + \delta) \cdot \cos(\psi - \delta)|}} = \\
 &= \frac{Z \cdot \cos \delta}{\sqrt{|\cos^2 \delta - \sin^2 \psi|}} = \frac{Z \cdot \cos \delta \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{|\cos 2\psi + \cos 2\delta|}}
 \end{aligned}$$

(3) Abstand des Mittelpunkts von der Äquinoktiallinie

$$\begin{aligned}
 c &= \overline{OM} = \overline{OH} - \overline{HB} + \overline{BM} = \\
 &= Z \cdot \left| \tan \psi - \tan(\psi - \delta) + \frac{1}{2} \cdot [\tan(\psi - \delta) - \tan(\psi + \delta)] \right| = \\
 &= Z \cdot \left| \tan \psi - \frac{\sin \psi \cdot \cos \psi}{\cos^2 \delta - \sin^2 \psi} \right| = Z \cdot \left| \frac{(-\tan \psi \cdot \sin^2 \delta)}{\cos^2 \delta - \sin^2 \psi} \right| = \\
 &= a \cdot \tan|\psi| \cdot \tan \delta
 \end{aligned}$$

(4) Abstand des Parabelbrennpunkts von der Äquinoktiallinie:

$$\begin{aligned}
 \delta &= 90^\circ - |\psi|, \quad \overline{BF} = \frac{p}{2} \\
 c &= \overline{OF} = \overline{OH} - \overline{HB} + \overline{BF} = \\
 &= Z \cdot \left| \tan \psi - \tan(2\psi - 90^\circ) + \frac{1}{2} \cdot \tan \psi \right| = \\
 &= \frac{3 \cdot Z}{2} \cdot \left| \tan \psi + \frac{1}{\tan 2\psi} \right| = Z \cdot \left| \frac{(3 \sin^2 \psi + \cos 2\psi)}{\sin 2\psi} \right| = \\
 &= Z \cdot \frac{1 + \sin^2 \psi}{\sin 2|\psi|}
 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Gegeben sei eine überhängende Norduhr in Würzburg mit $\varphi=50^\circ$, $d=160^\circ$, $i=-50^\circ$, $h_o=0$, $h_w=20^\circ$.

Es ist $\tau=167^\circ$.

5.3 Polargleichungen

Es ist interessant, nach einer geschlossenen Gleichungsform der Kegelschnitte zu suchen. Dies gelingt mit und ohne Kenntnis der Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte.

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \rho} \quad \text{für } 0 \leq \rho < 2\pi, \text{ wobei}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\cos \psi}{\sin \delta} \quad \text{und} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{Z}{\tan \delta}$$

$$\text{Halbachsen} \quad a = \frac{Z \cdot \sin 2\delta}{|\cos 2\psi + \cos 2\delta|} \quad 0 \leq \delta \leq 23,5^\circ$$

$$b = \frac{Z \cdot \cos \delta \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{|\cos 2\psi + \cos 2\delta|}} \quad 0 \leq \delta \leq 23,5^\circ$$

Abstand c des Mittelpunkts der Ellipse von der Äquinoktiallinie aus zum Gnomonfußpunkt H hin bzw. des Asymptotenschnittpunkts der Hyperbel von H weg:

$$c = \overline{OA} - \overline{AM} = \overline{OM} = a \cdot \tan|\psi| \cdot \tan \delta \quad 0 \leq \delta \leq 23,5^\circ$$

$$|\psi| = 90^\circ: \quad \text{Kreis,} \quad \varepsilon = 0, \quad p = \frac{Z}{\tan \delta}$$

$$|\psi| > 90^\circ - \delta: \quad \text{Ellipse,} \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$|\psi| = 90^\circ - \delta: \quad \text{Parabel,} \quad \varepsilon = 1, \quad p = Z \cdot \tan|\psi|$$

Abstand des Brennpunkts
von der Äquinoktiallinie: $c = \frac{Z (1 + \sin^2 \psi)}{\sin 2|\psi|}$

$$|\psi| < 90^\circ - \delta: \quad \text{Hyperbel,} \quad e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Z: Zeigerhöhe, Gnomonlänge

ψ : Winkel zwischen Zeiger und Ebene

O: Schnittpunkt der Substilarer mit der Äquinoktiallinie

M: Schnittpunkt der Asymptoten, Mittelpunkt

A: Scheitel des Kegelschnitts

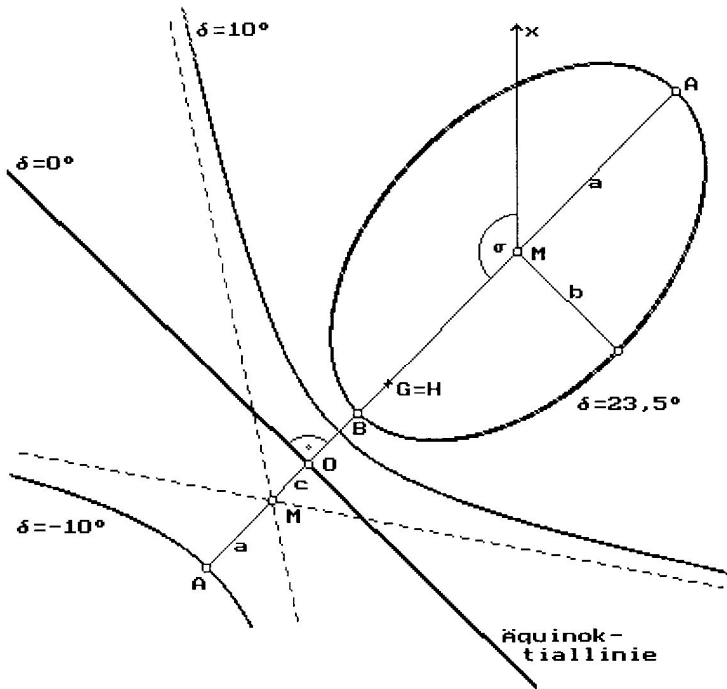


Abb. 64: Ellipse und Hyperbel als Deklinationslinien

Beispiel vgl. Abb. 64:

Es sei $\varphi=50^\circ$, $d=160^\circ$, $i=65^\circ$ und die Zeigerhöhe $Z=5\text{mm}$,
daraus folgt $\psi=72^\circ$ und $\sigma=136^\circ$.

Für $\delta=23,5^\circ > 90^\circ - |\psi|$ ergibt sich eine Ellipse mit den Halbachsen
 $a=30,2\text{mm}$; $b=18,6\text{mm}$ und dem Abstand $c=39,7\text{mm}$.

Für $\delta=\pm 10^\circ < 90^\circ - |\psi|$ ergibt sich eine Hyperbel mit den Halbachsen
 $a=12,5\text{mm}$; $b=18,0\text{mm}$ und dem Abstand $c=6,7\text{mm}$.

Die 11 Zifferblätter des Dodekaeders in Abb. 65 wurden mit dem Computer für die geographische Breite $\varphi=50^\circ$ gezeichnet. Sie tragen Tierkreislinien für die Sonnendeklinationen $\delta=0; \pm 11,5^\circ; \pm 20,2^\circ; \pm 23,4^\circ$ und Stundenlinien für volle Stunden.

Die oberen fünf Zifferblätter haben die Deklinationen $d=0, \pm 72^\circ, \pm 144^\circ$ und dieselbe Inklination $i=26,6^\circ$. Die unteren fünf Zifferblätter haben die Deklinationen $d=0, \pm 36^\circ, \pm 108^\circ, 180^\circ$ und dieselbe Inklination $i=-26,6^\circ$. Die Deckfläche trägt das Zifferblatt einer Horizontaluhr mit $d=0$ und $i=90^\circ$.

Die Stundenlinien zeigen WOZ an.

Die zueinander parallelen Poloszeiger sind durch Gnomone mit der Zeigerhöhe $Z=1\text{cm}$ ersetzt, so dass nur die Schattenspitzen zur Ablesung dienen.

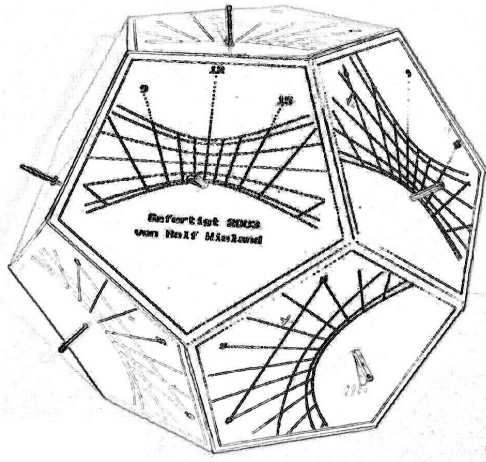
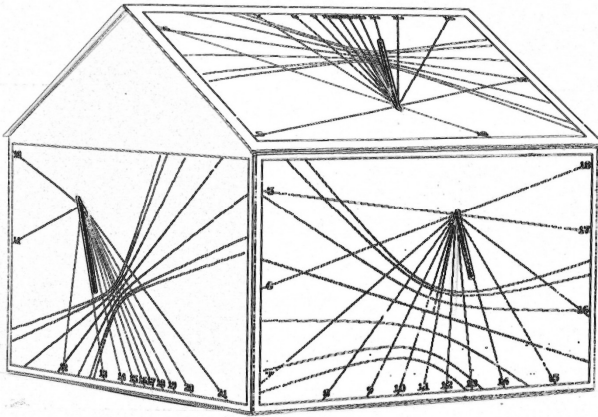


Abb. 65: Vielflächner

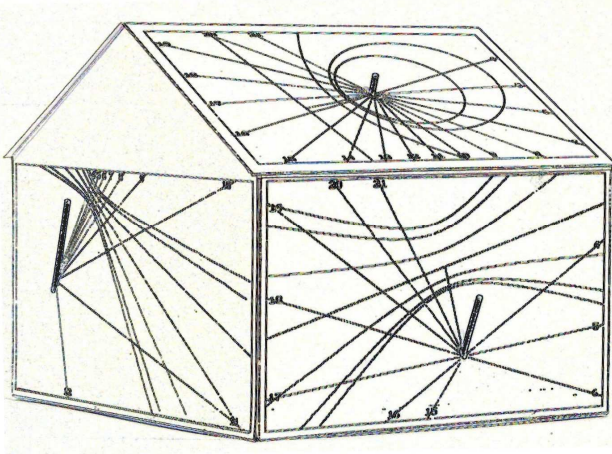
Sonnenuhrenhaus $\lambda=-10^\circ, \varphi=50^\circ$



Südwand $d=-20^\circ, i=0^\circ$

Westwand $d=70^\circ, i=0^\circ$

Südliche Dachfläche $d=-20^\circ, i=55^\circ$



Nordwand $d=160^\circ, i=0^\circ$

Ostwand $d=-110^\circ, i=0^\circ$

Nördliche Dachfläche $d=160^\circ, i=55^\circ$

WielandRolf@web.de