Die Zeitgleichung

Sonnenuhren zeigen gegenüber Normalzeituhren periodische Gangabweichungen. Sie gehen in gewissen Phasen des Jahres gegenüber der Normalzeit vor oder nach. Im Laufe des Jahres gleicht sich dies aber aus. Unsere Normalzeit basiert auf der über ein Jahr gemittelten Sonnenzeit. Der Unterschied zwischen der von einer Sonnenuhr angezeigten Sonnenzeit oder „wahren Ortszeit“ (WOZ) und der „mittleren Ortszeit“ (MOZ) wird traditionell „Zeitgleichung“ genannt (im Sinne von „Angleichung“, Korrektur).

Es ist: ZG = WOZ – MOZ

Der Erdentag, also die Abfolge von Tag und Nacht, ergibt sich hauptsächlich aus der Drehung der Erde um die Erdachse. Die Zeit, die zwischen zwei Meridiandurchgängen eines beliebigen Fixsterns verstreicht, also die Zeit, bis dieser Stern zum zweiten Mal genau im Süden steht, wird Sternentag genannt. Der Sternentag entspricht einer Erdumdrehung.
Die Sonne wandert nun im Laufe eines Tages gegenüber dem Fixsternhintergrund langsam in West-Ost-Richtung, also gegen die allgemeine Umlaufrichtung, sodass es etwas länger dauert, bis sie zum zweiten Mal im Süden steht. Die Zeit zwischen zwei Meridiandurchgängen der Sonne wird Sonnentag genannt und ist etwas länger als ein Sternentag. Der Sonnentag entspricht unserem normalen Tagesbegriff und hat 24 Stunden.
Der Unterschied zwischen Sonnentag und Sternentag ergibt sich aus dem Umlauf der Erde um die Sonne. Dieser Umlauf ist unabhängig von der Erddrehung und steht mit dieser in keinem Zusammenhang.
Würde sich die Erde nicht um ihre Achse drehen, sondern stillstehen, so würde es wegen des Erdumlaufs an jedem Ort im Laufe eines Jahres einmal Tag und einmal Nacht. Ein Tag würde also ein Jahr dauern. Dies ist in Bild 1 grafisch dargestellt.

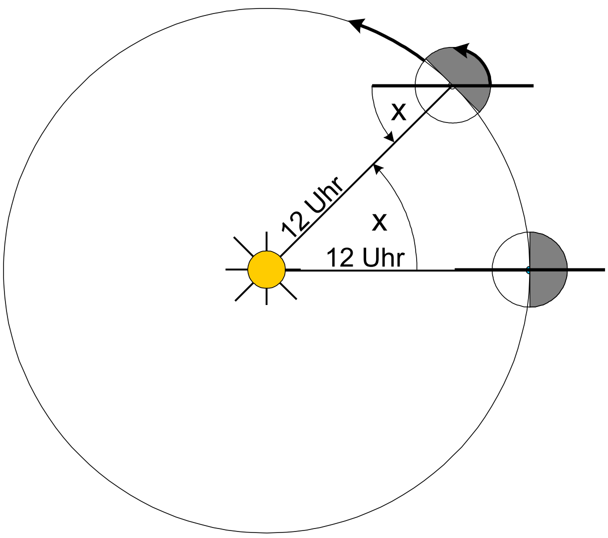
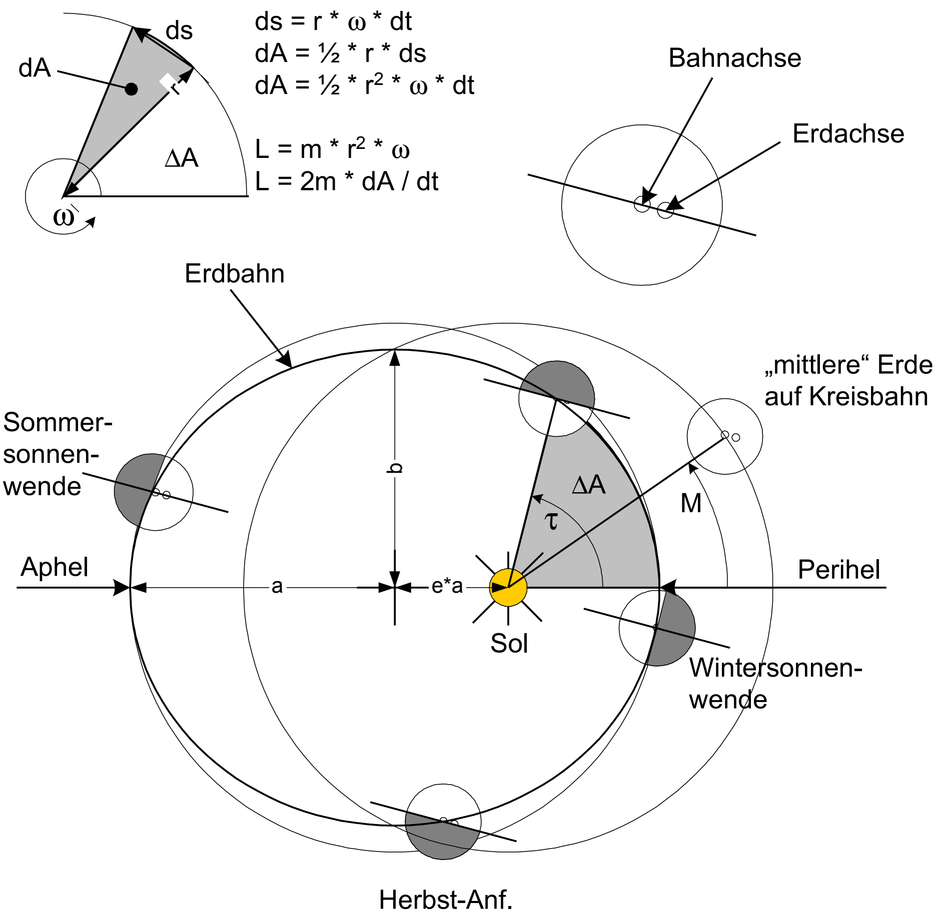


Bild 1: Blick auf die Bahnebene und die Nordhalbkugel.
Die Erde muss sich um den zusätzlichen Winkel x weiterdrehen, bis es wieder 12-Uhr-Mittag ist. Dies macht pro Tag ca. 4 Minuten aus und summiert sich im Jahr zu 1 Tag.
Durch die Erdrotation im Gegenuhrzeigersinn dreht sich der Nachtschatten relativ zur Erdoberfläche im Uhrzeigersinn. Durch den Erdumlauf, ebenfalls im Gegenuhrzeigersinn, dreht sich der Nachtschatten im Gegenuhrzeigersinn. Wegen der Überlagerung der beiden Bewegungen dreht sich der Nachtschatten im Uhrzeigersinn, aber etwas langsamer, als allein durch die Erdrotation.

Die Erde dreht sich in einem Jahr 366,26 mal um ihre Achse. Davon muss wegen des genannten Effekts 1 Tag abgezogen werden, so dass ein Jahr 365,26 Tage hat.
Wenn ein Tag 24 Stunden hat, so hat ein Jahr 365,26 * 24 h = 8766 h.
Eine Erdumdrehung dauert also 8766 h / 366,26 = 23,93 h = 23 h 56 min.
Ein Sonnentag ist also 4 Minuten länger als ein Sternentag. Diese vier Minuten sind dem Erdumlauf geschuldet; es handelt sich hier allerdings um einen Jahresmittelwert. Die Erdumdrehung ist sehr konstant, ein Sternentag ist also immer gleich lang. Im Gegensatz dazu ist der Erdumlauf jahreszeitlichen Schwankungen unterworfen, der Bahnwinkel steigt nicht

linear über der Zeit an, ein Sonnentag ist also nicht immer gleich lang. Da eine Sonnenuhr den aktuellen Sonnenstand anzeigt, kommt es gegenüber unseren gleichmäßig laufenden Uhren zu den Abweichungen, um die es in diesem Beitrag gehen soll.
Normalerweise liest man den Wert der Zeitgleichung bequem und genau aus einer Tabelle ab (z. B. auf der Homepage von HELIOS). Der Wert ist für jeden Tag des Jahres verschieden und die Werte ändern sich von Jahr zu Jahr etwas, hauptsächlich deshalb, weil sich ein Jahr nicht ganzzahlig auf Tage aufteilen lässt.
Die Zeitgleichung wurde schon bald nachdem Johannes Kepler seine berühmten Gesetze veröffentlicht hatte, theoretisch abgeleitet, sie beschäftigt aber bis heute astronomisch interessierte Menschen immer wieder neu.

Der ungleichmäßige Lauf der Sonnenuhren hat zwei unterschiedliche Gründe.
Der erste Grund ist, dass die Erdbahn nicht genau kreisförmig, sondern elliptisch ist. Die Erdbahn ist eine fast kreisförmige Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Dies hat zur Folge, dass der Abstand Erde-Sonne nicht konstant ist. Die Erde nähert sich der Sonne, um sich dann wieder von ihr zu entfernen. Der sonnennächste Punkt heißt Perihel und wird etwa am 3. Januar erreicht. Der sonnenfernste Punkt heißt Aphel und wird ein halbes Jahr später, also etwa am 5. Juli erreicht.
Isaac Newton erkannte als erster, dass die Kraft, die die Planeten auf ihre Bahn zwingt, dieselbe ist, die auch einen Apfel vom Baum fallen lässt. Ein Apfel, der vom Baum fällt, verliert während des Falls Lageenergie (potentielle Energie) und gewinnt Bewegungsenergie (kinetische Energie), er wird deshalb während des Fallens immer schneller. Die Gesamtenergie, also die Summe aus Lage- und Bewegungsenergie, bleibt gleich. Ähnlich verhält es sich mit der Erde. Während sie sich im Potentialfeld der Sonne dieser nähert, gewinnt sie an Geschwindigkeit, ihre Bahngeschwindigkeit ist also im sonnennächsten Punkt am größten. Umgekehrt verliert sie an Geschwindigkeit, wenn sie sich von der Sonne entfernt. Ihre Bahngeschwindigkeit ist also im sonnenfernsten Punkt am kleinsten. Der unterschiedliche Abstand und die unterschiedliche Bahngeschwindigkeit bewirken, dass der vom Fahrstrahl der Erde in einer bestimmten Zeit überstrichene **Bahnwinkel τ** unterschiedlich ist (Bild 2) und dies muss Auswirkungen auf die Tageslänge haben (vergleiche auch Bild 1).



<u>Bild 2</u>: Die Daten der Bahnellipse:

1. Große Halbachse	**a = 149,60 Mio. km**
2. Numerische Elliptizität	**e = 0,0167**
3. Kleine Halbachse	**$b = \sqrt{(a^2 * (1-e^2))}$ = 149,58 Mio km**
3. Größter Abstand Sonne-Erde im Aphel	**$r_A = a * (1+e)$ = 152,1 Mio km**
4. Kleinster Abstand Sonne-Erde im Perihel	**$r_P = a * (1- e)$ = 147,1 Mio km**

Wie man sieht, weicht die Bahn nur minimal von der Kreisform ab!

Neben dem Energieerhaltungssatz ist hier auch der **Impulserhaltungssatz** anwendbar. Der Drehimpuls eines um ein Zentrum kreisenden Massepunkts ist:

$$\mathbf{L = m * r^2 * \omega}$$

Darin ist: L der Drehimpuls, m die Punktmasse, r der Bahnradius und ω die Winkelgeschwindigkeit. Die Winkelgeschwindigkeit ist der pro Zeiteinheit überstrichene Winkel.

Das zunächst etwas sonderbar anmutende zweite Keplersche Gesetz folgt unmittelbar aus dem Impulserhaltungssatz.
Der Drehimpuls ist nämlich proportional der vom Fahrstrahl der Erde in der Zeitspanne dt überstrichenen Fläche dA (siehe Bild 2). Es ist:

$$\mathbf{L = 2m * dA/dt}$$

Weil L konstant ist, gilt die Gleichung auch für endlich große Zeitabschnitte Δt:
$L = 2m * \Delta A/\Delta t$ oder $\Delta A = L/2m * \Delta t$
Die vom Fahrstrahl in gleichen Zeiten Δt überstrichene Fläche ist konstant. Dies aber ist die Aussage des zweiten Keplerschen Gesetzes.

Wir wollen nun den Wert des Drehimpulses ermitteln:
Im Laufe eines Jahres überstreicht der Fahrstrahl die ganze Ellipsenfläche $A = \pi * a * b$.
Der Drehimpuls ist somit: $\mathbf{L = 2m * \pi * a * b / Jahr}$

Für den minimalen Abstand im Perihel gilt:
$L_P = m * r_P^2 * \omega_P$
Da nun aber der Drehimpuls konstant ist gilt:
$L_P = L$
$m * r_P^2 * \omega_P = 2m * \pi\, a * b$

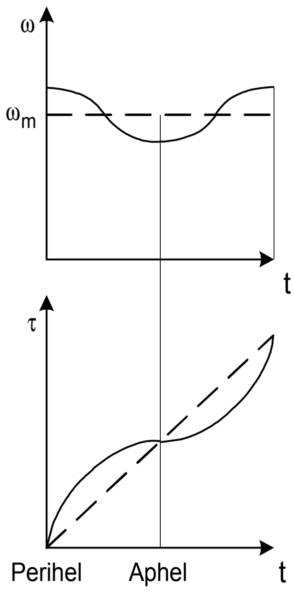
und somit ist die Winkelgeschwindigkeit im Perihel:

$$\boxed{\omega_P = 2\pi * a * b / r_P^2 / Jahr \qquad (Gl.\ 1)}$$

Mit den in Bild 2 genannten Werten ergibt sich: ω_P = 6,498 / Jahr = 0,01779 / Tag

Nach dieser Methode kann man die Winkelgeschwindigkeit der Erde in jedem beliebigen Bahnpunkt bestimmen. Was nicht geht, ist, den Zeitpunkt zu bestimmen, wann die Erde diese Winkelgeschwindigkeit hat, also die Zeitfunktion. In Bild 3 ist diese Zeitfunktion qualitativ und stark übertrieben dargestellt. Es handelt sich um eine Konstante ω_m, der eine Schwingung überlagert ist.

<u>Bild 3</u>: Zeitfunktion der Winkelgeschwindigkeit ω
und des Bahnwinkels τ (qualitativ).



Wir können zwei Dinge über diese Schwingung aussagen:
1. Es handelt sich um eine periodische Funktion mit einer Periode von 1 Jahr.
2. Die Funktion ist symmetrisch, denn die Erde durchläuft den oberen Ast der Bahn (Perihel → Aphel)) in derselben Zeit wie den unteren Ast (Aphel → Perihel).

Die einfachste Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, ist die Sinusfunktion. Die Sinusfunktion ist immer eine erste Näherung für Funktionen der genannten Art. Die Kosinusfunktion hat die gleiche Form, sie ist nur um 90° verschoben. Wir entscheiden uns für die Kosinusfunktion.

Die gesuchte Zeitgleichung hat also in erster Näherung die Form:
$\boldsymbol{\omega(t) = \omega_m + A * \cos(\omega_m * t)}$ mit: $\omega_m = 2\pi / Jahr = 2\pi / 365{,}26$ [1/ Tag]

Darin ist A die Amplitude, ω_m die mittlere Bahnwinkelgeschwindigkeit der Erde und t die Zeit [in Tagen]. Die Amplitude ist der Maximalwert der Schwingung, in unserem Fall also die weiter oben errechnete maximale Winkelgeschwindigkeit im Perihel ω_P abzüglich der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_m, also $A = \omega_P - \omega_m$.

Wir erhalten somit:
$\boldsymbol{\omega(t) = \omega_m + (\omega_P - \omega_m) * \cos(\omega_m * t)}$ **[1/Tag] (Gl.2a)**

Zeitachse

Die Gleichung 2a hat ihren Maximalwert bei t = 0 und dieser wird im Perihel erreicht. Da unsere Zeitachse aber am 1. Januar beginnen soll, müssen wir die Gl. 2a noch auf dieser Zeitachse entsprechend positionieren. Das Datum, an dem die Erde im jeweiligen Jahr den Perihel durchläuft, muss nachgeschlagen werden (siehe z. B. Lit. [2]).
Im Jahr 2011 ist das am 3. Januar 20 Uhr MEZ der Fall. Auf dem Zeitstrahl ist dies der Punkt $t_P = 2{,}83$ (siehe Bild 4).
Aus Gleichung 2a wird jetzt:

Bahnwinkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_m + (\omega_P - \omega_m) * \cos(\omega_m * (t - t_P))$	Gl. 2

Wie man sich leicht überzeugt, wird jetzt für t = 2,83, also dem Tag des Periheldurchgangs, das Argument des cos zu eins und die Winkelgeschwindigkeit hat ihren Maximalwert $\omega = \omega_P$.
Wir wissen nun also näherungsweise, wie sich die Winkelgeschwindigkeit der Erde im Laufe eines Jahres entwickelt.
Daraus lässt sich durch Integration auch der Bahnwinkel τ berechnen, den die Erde vom Jahresbeginn bis zum Tag t zurückgelegt hat.

Bahnwinkel $\tau = \int \omega(t)\, dt = \omega_m*(t-t_P) + (\omega_P - \omega_m) / \omega_m * \sin(\omega_m * (t - t_P))$	Gl. 3

(vom Perihel aus gemessen)

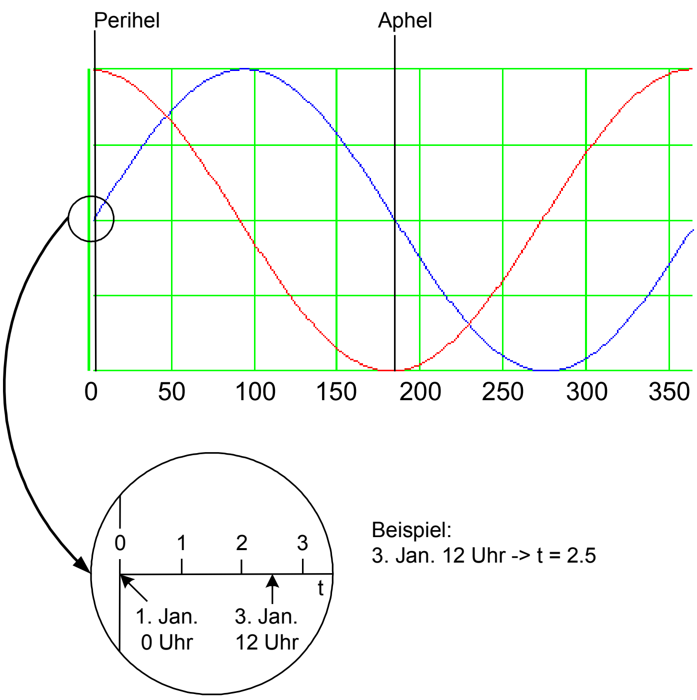


Bild 4: Hier ist blau der Bahnwinkel τ der Erde ohne den linearen Anteil $\omega_m * (t-t_P)$ aufgetragen. Würde man den gesamten Bahnwinkel auftragen, würde sich optisch eine Gerade ergeben, weil die Amplitude der überlagerten Schwingung so klein ist. „Reale" Erde und „mittlere" Erde starten gemeinsam im Perihel. Dann eilt die reale Erde der mittleren Erde voraus, bis sich beide im Aphel wieder treffen. Danach eilt die mittlere Erde der realen Erde voraus, bis sich beide im Perihel wieder treffen.
Die rote Linie ist die Bahnwinkelgeschwindigkeit ohne den konstanten Anteil ω_m . Im Perihel, also im sonnennächsten Punkt, hat die Bahnwinkelgeschwindigkeit ihren Maximalwert. Der Bahnwinkel nimmt deshalb schneller zu und die reale Erde eilt der mittleren Erde voraus. Dann nimmt die Winkelgeschwindigkeit ab und erreicht im Aphel ihren Minimalwert, die reale Erde holt deshalb auf. Im Aphel treffen sich reale und mittlere Erde wieder.

Wie gesagt, ist die gefundene Gleichung 3 nur eine „erste Näherung“. Wir haben aber keine Anhaltspunkte dafür, wie genau diese Näherung die Wirklichkeit wiedergibt. Für dieses Problem existiert keine geschlossene mathematische Lösung, d. h. es gibt keine algebraische „Formel“, mit der man den Bahnwinkel berechnen kann. Was es gibt, ist eine Reihenentwicklung (siehe Lit. [1]). Diese besteht aus einem Lineargliied und – theoretisch – unbegrenzt vielen Sinusgliedern mit ansteigender Frequenz. Diese enthalten in der Amplitude die **numerische Exzentrizität e** der Erdbahn mit ansteigender Potenz (also e, e^2, e^3 ...). Weil $e \ll 1$ ist, werden die Amplituden dieser Schwingungen rasch sehr klein. Es genügt vollkommen, nur die ersten zwei Glieder zu berücksichtigen. Demnach ist:

Bahnwinkel $\tau = M + 2*e * \sin M + 5/4*e^2 * \sin (2M)$ Gl. 3a

mit: $M = \omega_m * (t - t_P)$ (mittlerer Bahnwinkel, siehe Bild 2)

Das Linearglied stimmt natürlich mit Gl. 3 überein. Die Amplitude der ersten Sinusschwingung stimmt fast mit Gl. 3 überein, nur die zweite Schwingung bringt etwas Neues. In der Zeitgleichung schlägt sich dies mit maximal etwa 5 Sekunden nieder.

Wie schlagen wir nun die Brücke zur Sonnenuhr?
Wie aus dem bereits Gesagten hervorgeht, macht nicht die gleichmäßige Drehung der Erde um ihre Achse Probleme, sondern es sind die zusätzlichen Minuten, die durch den Umlauf um die Sonne entstehen. Weil die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant ist, kommt es zu Schwankungen und ungleichen Tageslängen. Im Gegensatz zu einer normalen Uhr weicht die Sonnenuhr aber im Laufe der Zeit nicht immer weiter von der richtigen Zeit ab, vielmehr gleichen sich die Schwankungen im Jahresverlauf aus. Dies ist auch verständlich, denn unsere Normalzeit basiert ja auf dem Sonnenlauf.
Im Folgenden betrachten wir nur den Erdumlauf und stellen uns vor, dass die Erde sich nicht dreht, sondern still steht. Ferner betrachten wir die Sache von der Erde aus, also geozentrisch. In diesem Fall wandert die Sonne einmal im Jahr um die Erde herum, und zwar von West nach Ost. Sie bewegt sich dabei in der **Bahnebene**. Ihre Winkelgeschwindigkeit wird durch Gl. 2 angegeben und ihr Bahnwinkel durch Gl. 3.

In Bild 5 ist hellgrün ein Ziffernblatt gezeichnet, das parallel zur Bahnebene liegt, die Sonnenstrahlen fallen also ganzjährig parallel dazu ein. Senkrecht dazu steht die „Drehachse“, eine Parallele zur Bahnachse. Wenn man sich diese Drehachse als Schattenstab vorstellt, wirft die wandernde Sonne einen Schattenzeiger auf das Ziffernblatt. Dieser bildet den Bahnwinkel τ'. Wir messen den Bahnwinkel τ vom Perihel aus, während τ' von der Sommersonnenwende aus gemessen wird.
Das gelb gezeichnete Ziffernblatt einer Äquatorialsonnenuhr (z. B. Modell POLARIS) liegt aber parallel zur **Äquatorebene**.
Die Äquatorebene bildet mit der Bahnebene den Winkel **$\varepsilon = 23{,}44°$ (die sogenannte Schiefe der Ekliptik).** Der Schatten der Drehachse fällt nun auch auf dieses Ziffernblatt. Wegen der Schrägstellung kommt es allerdings zu einer **Winkelverzerrung**, der Schatten macht aber auch hier innerhalb eines Jahres eine Volldrehung.
Ferner liegt der Schattenstab einer Äquatorialsonnenuhr nicht parallel zur Bahnachse, sondern parallel zur Erdachse.
In der ebenen Darstellung lässt sich die Beziehung zwischen dem Bahnwinkel τ' und dem Zeigerwinkel α leicht erkennen:
Es ist:

Winkel des Schattenzeigers $\alpha = \arctan(\tan\tau' / \cos\varepsilon)$	Gl. 4

Im Frühlings- und Herbstpunkt wird τ' ein rechter Winkel. Hier ist die Tangensfunktion nicht definiert, es ist aber aus der Zeichnung leicht ersichtlich, dass hier gilt: $\alpha = \tau'$.

Mit Gleichung 3 bzw. 3a kann man den Bahnwinkel τ für ein gegebenes Datum berechnen. Dieser wird aber vom Perihel aus gemessen, während der Winkel τ' von der Sommersonnenwende aus gemessen wird. Es muss also noch die Winkeldifferenz zwischen Perihel und Sommersonnenwende berechnet werden, um τ' zu erhalten.
Hierzu müssen wir das Datum der Sommersonnenwende nachschlagen. In 2011 ist das der 21. Juni, 18 Uhr. Um den Punkt auf der Zeitachse (Bild 4) zu bestimmen, sind, wie schon gezeigt, die Tage seit Jahresanfang abzuzählen, es sind t = 171,75 Tage. Die setzen wir in Gl. 3a ein und erhalten den Bahnwinkel zur Sommersonnenwende:

$$\tau_{SSW} = M + 2 * e * \sin M + 5/4 * e^2 * \sin(2M)$$

mit: $M = \omega_m * (t - t_P)$ (mittlerer Bahnwinkel)

Somit erhalten wir zum Einsetzen in Gl. 4:

$$\boldsymbol{\tau' = \tau - \tau_{SSW}} \qquad \text{Gl.4a}$$

Wegen der Mehrdeutigkeit der Tangensfunktion ist unter Umständen noch eine Korrektur des gefunden Winkels α um +/- 180° (bzw. +/- π) nötig. Dabei gilt, dass sich α nur wenig von τ' unterscheiden darf.

<u>Beispiele:</u>

$\tau' = 30°$	$\alpha = 32{,}18°$	keine Korrektur nötig
$\tau' = 150°$	$\alpha = -32{,}18°$	$\alpha = -32{,}18° + 180° = 147{,}82°$
$\tau' = 210°$	$\alpha = 32{,}18°$	$\alpha = 32{,}18° + 180° = 212{,}18°$
$\tau' = -150°$	$\alpha = 32{,}18°$	$\alpha = 32{,}18° - 180° = -147{,}82°$

Es soll noch erwähnt werden, dass in anderen Darstellungen (siehe Lit. [1]) die Gleichung 4 in Form einer Reihe dargestellt wird. Es ist demnach:

$\alpha = \tau' + x^2 * \sin(2 * \tau') + 1/2 * x^4 * \sin(4 * \tau') + 1/3 * x^6 * \sin(6 * \tau') + ...$
mit: $x = \tan(\varepsilon/2)$

Die Glieder mit den höheren Potenzen von x sind zu vernachlässigen.

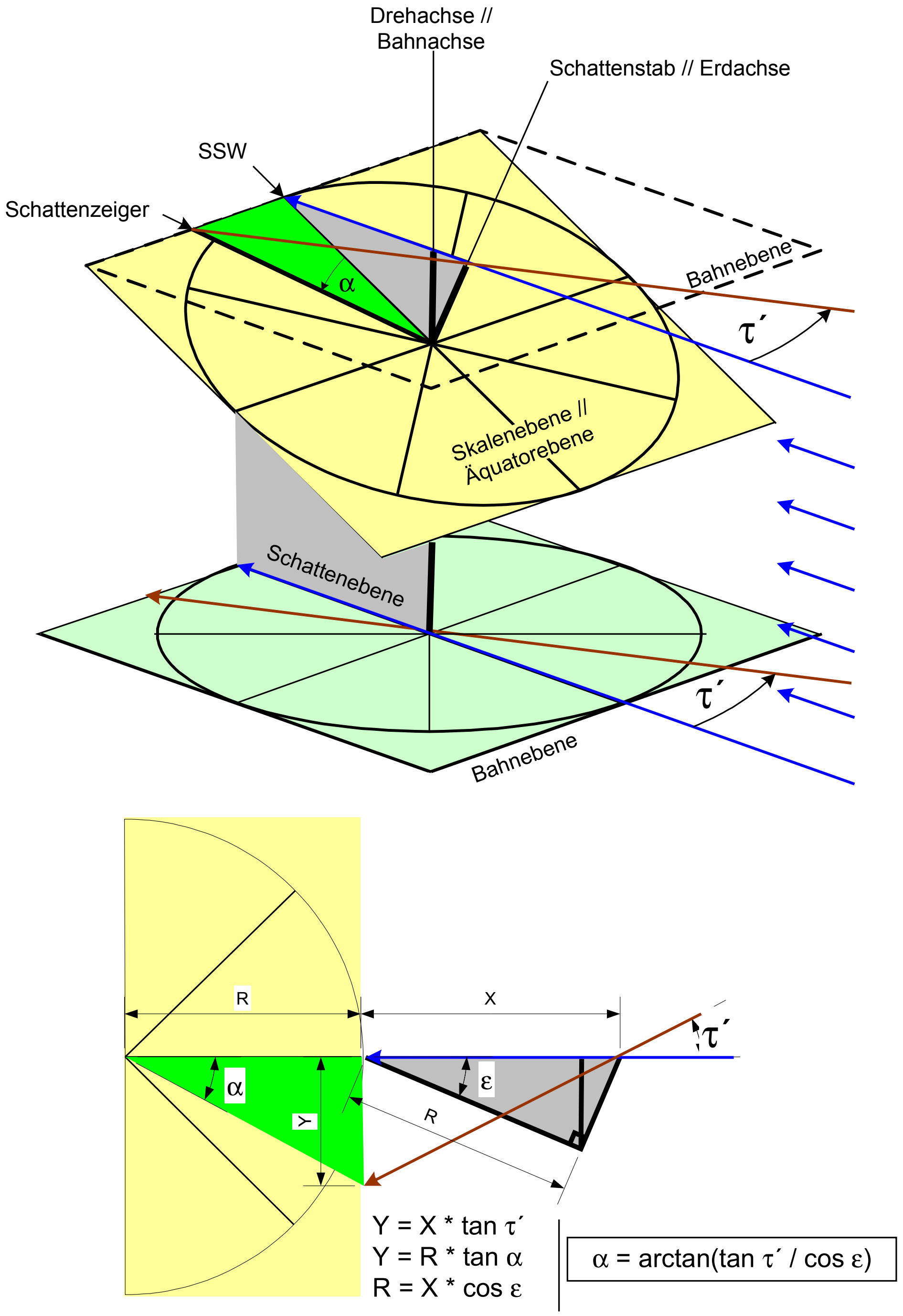


Bild 5: Projektion des Bahnwinkels auf die Skalenscheibe einer Sonnenuhr

1. **Die Sonne bewegt sich ganzjährig in der Bahnebene. Die Sonnenstrahlen fallen also parallel zur Bahnebene ein und bilden mit der „Drehachse" einen rechten Winkel.**
2. **Der Strahl, der zur Sommersonnenwende (SSW) über die Spitze des Schattenstabs und die Spitze der Drehachse geht, trifft im Punkt „SSW" auf die Skalenebene. Die Schattenebenen von Drehachse und Schattenstab fallen zusammen.**
3. **Wenn sich die Sonne dann um den Winkel τ´ weiterdreht, zeichnet der Strahl, der über die Spitze des Schattenstabs geht, eine gerade Linie auf die Skalenebene, das ist die Schnittlinie von Skalenebene und Bahnebene.**
4. **Der Winkel α ist der zu τ´ gehörige Winkel des Schattenzeigers. Der Schattenzeiger überstreicht auf der Skalenebene also in einem bestimmten Zeitabschnitt einen anderen Winkel als die Sonne. Im ganzen Jahr überstreichen aber sowohl Sonne als auch Schattenzeiger einen Vollkreis.**

Die Zeitgleichung

Mit Hilfe des gefundenen Winkels α können wir die Position des Schattenzeigers für jeden Zeitpunkt des Jahres ermitteln. Diese Position wird nun verglichen mit der Position eines gleichmäßig umlaufenden „mittleren“ Uhrzeigers. Aus der Winkeldifferenz zwischen Schattenzeiger und Uhrzeiger ergibt sich die Zeitgleichung.
Wir geben die Position des Uhrzeigers mit dem Winkel φ an. Dieser Winkel steigt linear mit der Zeit an kann mit folgender Gleichung berechnet werden:

$$\varphi = \omega_m * (t - t_{SSW}) - \varphi_0 \qquad \text{Gl. 5}$$

Der Uhrzeiger läuft einmal im Jahr um, seine Winkelgeschwindigkeit ist somit
$\omega_m = 2*\pi / 365{,}26$ Tage.
t ist die Zahl der Tage seit Jahresanfang und t_{SSW} die Zahl der Tage von Jahresanfang bis Sommersonnenwende.

Die Zeitgleichung ist also: $ZG = \alpha - \varphi$ [rad]

Es ist aber noch die Frage offen, wo man den Nullpunkt für den Winkel φ setzen will. Um ein analoges Beispiel zu nennen: Der Abstand zwischen zwei Wettläufern ergibt sich nicht nur aus der Differenz ihrer Laufgeschwindigkeiten, sondern hängt auch vom Startpunkt ab. Sie können zum Startzeitpunkt $t = 0$ an derselben Stelle starten oder aber in einem gewissen Abstand voneinander. In der Mathematik spricht man hier von einer Integrationskonstanten.
Im Rahmen der in diesem Aufsatz verfolgten Argumentationslinie wäre es naheliegend, den Winkel φ gemeinsam mit dem Winkel α beginnen zu lassen. Schaut man sich aber die zahlreich vorhandenen graphischen Darstellungen der Zeitgleichung an (Bild 7), so sieht man, dass die Zeitgleichung zur Sommersonnenwende (t_{SSW}) nicht den Wert Null hat, sondern den Wert des Bahnwinkels ohne den Linearanteil.
Aus Gl. 3 erhält man somit:

$$\varphi_0 = (\omega_P - \omega_m) / \omega_m * \sin(\omega_m * (t_{SSW} - t_P)) \qquad \text{Gl. 5a}$$

oder aus Gl. 3a:

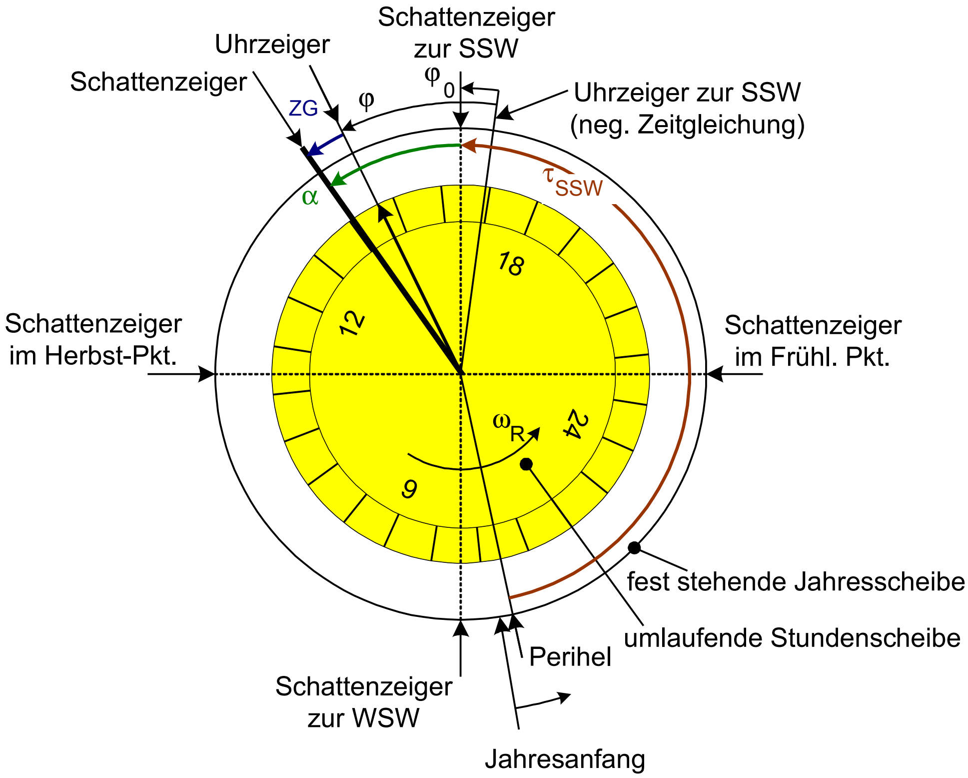
$$\varphi_0 = 2*e * \sin M + 5/4*e^2 * \sin(2M) \qquad \text{Gl. 5b}$$

mit: $M = \omega_m * (t_{SSW} - t_P)$

Für $t = t_{SSW}$ erhält man somit die Zeitgleichung: $ZG = \alpha - \varphi = \varphi_0$ [rad]
(zu diesem Zeitpunkt ist definitionsgemäß $\alpha = 0$ und es gibt keine Winkelverzerrung, die Zeitgleichung ergibt sich also nur aus der Ellipsenbahn).

Hier ist die Zeitgleichung als Winkel im Bogenmaß ausgedrückt. Da die Zeitgleichung aber nicht als Winkel, sondern in Zeitminuten angegeben wird, ist noch eine entsprechende Umrechnung notwendig. Ein Vollkreis entspricht einem Tag, also 24 Stunden oder 1440 Minuten, somit $2\pi \equiv 1440$ Minuten.
In Bild 6 hat ZG, als Winkel ausgedrückt, einen positiven Wert. In Zeitminuten ausgedrückt, ist der Wert jedoch entsprechend der Definition der Zeitgleichung negativ (der Schattenzeiger zeigt WOZ = 14 Uhr, der Uhrzeiger etwa MOZ = 14:40). Somit ist noch eine Vorzeichenumkehr nötig und man erhält die Zeitgleichung:

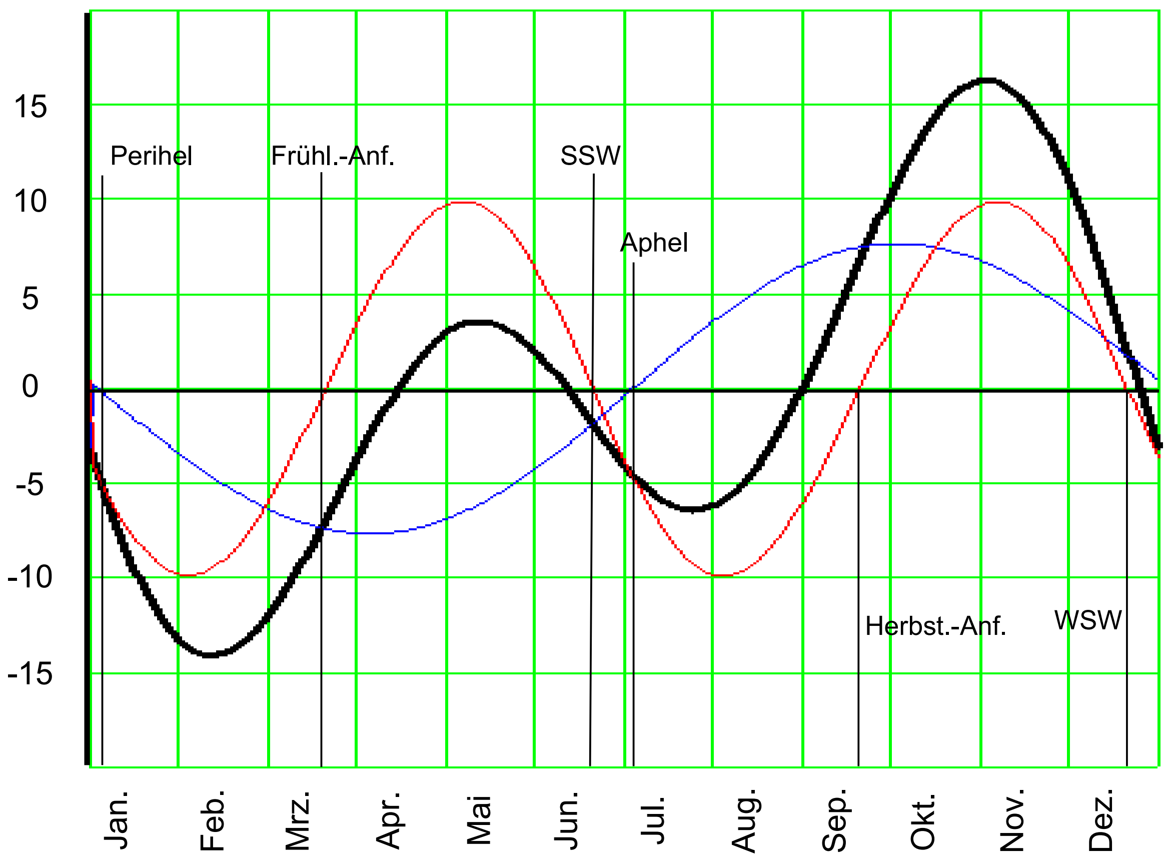
$$\boxed{ZG = 1440 / 2\pi * (\varphi - \alpha) \qquad [\text{Minuten}] \qquad \text{Gl. 6}}$$



<u>Bild 6</u>: Überlagerung von Erdrotation und Erdumlauf. Auf der fest stehenden Jahresscheibe könnte man die Daten (Tagesnummern) auftragen. Der Schattenzeiger und der Uhrzeiger drehen sich im Gegenuhrzeigersinn und machen eine Umdrehung im Jahr. Auf der gelb gezeichneten Stundenscheibe sind die Stunden angeschrieben. Sie dreht sich ebenfalls im Gegenuhrzeigersinn mit der Rotationsgeschwindigkeit der Erde, also einmal pro Sternentag (= 23h : 56m). Die Stundenscheibe dreht sich sozusagen unter dem Schattenzeiger und dem Uhrzeiger durch. Auf die Winkeldifferenz, also die Zeitgleichung, hat die Erdrotation keinen Einfluss. Der Schattenzeiger zeigt die Sonnenzeit oder „wahre Ortszeit" WOZ an, der Uhrzeiger zeigt die „mittlere Ortszeit" MOZ an. Die im Bild gezeigte Zeigerstellung gibt die Situation gegen Ende Juli wieder. Der Schattenzeiger zeigt WOZ = 14 Uhr, der Uhrzeiger zeigt bereits eine spätere Uhrzeit. Der Winkel ist stark übertrieben gezeichnet, in Wirklichkeit beträgt die Zeitdifferenz um diese Zeit etwa -6 Minuten.

Wir sind nun am Ziel. Es waren viele Schritte nötig. Das Wesentliche lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Der ungleichmäßige Erdumlauf führt zum Bahnwinkel τ. Die Projektion dieses Winkels auf die Skalenscheibe der Sonnenuhr führt zum Winkel α des Schattenzeigers. Der Vergleich mit dem gleichmäßig umlaufenden „Uhrzeiger" führt zur Zeitgleichung.



<u>Bild 7</u>: Grafische Darstellung der Zeitgleichung (schwarze Kurve).
Die blaue Kurve gilt für $\varepsilon = 0$, also wenn die Erdachse nicht schräg zur Bahnebene stehen würde. In diesem Fall gäbe es keine Jahreszeiten. Die Zeitgleichung ergibt sich hier allein aus der Exzentrizität der Erdbahn. Die rote Kurve gilt für $e = 0$, also wenn die Erdbahn kreisförmig wäre. Die Zeitgleichung ergibt sich hier nur aus der Schrägstellung der Erdachse.

Zusammenfassung

Abschließend anhand eines konkreten Beispiels eine Schritt-für-Schritt-Anleitung, wie mit den gefundenen Formeln die Zeitgleichung berechnet wird.

Konstanten:

$e = 0{,}0167$	numerische Elliptizität der Erdbahn
$\omega_m = 0{,}017202$	mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde [1/Tag]
$\varepsilon = 0{,}4091$	Schiefe der Ekliptik (23,44°)

1. Den Periheldurchgang der Erde nachschlagen (siehe z. B. Lit [2]). In 2011 ist das am 3. Januar, 20 Uhr MEZ der Fall.
2. Die Tage seit Jahresanfang bis zum Periheldurchgang abzählen (vergl. Bild 4). Im Beispiel sind es 2,83 Tage. Somit ist
   $t_P = 2{,}83$.
3. Nach der gleichen Methode den Punkt auf der Zeitachse festlegen, zu dem der Wert der Zeitgleichung bestimmt werden soll. Im Beispiel soll das der 10. Januar, 12 Uhr sein. Somit ist
   $t = 9{,}5$.
4. Mit Gl. 3a den Bahnwinkel τ berechnen (den Taschenrechner auf [rad] einstellen!).
   $\tau = M + 2{*}e * \sin M + 5/4{*}e^2 * \sin(2M)$
   mit: $M = \omega_m * (t - t_P) = 2\pi/365{,}26 * (t - t_P)$
   $\tau = 0{,}11864$
5. Den Tag der Sommersonnenwende nachschlagen. In 2011 ist das der 21. Juni, 18 Uhr MEZ.
   Auf der Zeitachse entspricht das dem Punkt 171,75, somit ist
   $t_{SSW} = 171{,}75$.
6. Mit Gl.3a den Bahnwinkel zur Sommersonnenwende berechnen:
   $\tau_{SSW} = M + 2{*}e * \sin M + 5/4{*}e^2 * \sin(2M)$
   mit: $M = \omega_m * (t_{SSW} - t_P) = 2\pi/365{,}26 * (t_{SSW} - t_P)$
   $\tau_{SSW} = 2{,}9134$
7. Den Winkel τ' mit Gl. 4a berechnen:
   $\tau' = \tau - \tau_{SSW}$
   $\tau' = -2{,}7948$
8. Mit Gl. 4 den Winkel des Schattenzeigers berechnen:
   $\alpha = \arctan(\tan(\tau - \tau_{SSW}) / \cos\varepsilon) = 0{,}375274$
   Um α an τ' anzunähern, ist noch eine Korrektur um π nötig:
   $\alpha = \alpha - \pi = -2{,}7663$
9. Mit Gl. 5b den Startwinkel des Uhrzeigers berechnen:
   $\varphi_0 = M + 2{*}e * \sin M + 5/4{*}e^2 * \sin(2M)$
   mit: $M = \omega_m * (t_{SSW} - t_P)$
   $\varphi_0 = 7{,}6455 * 10^{-3}$
10. Mit Gl. 5 den Winkel des Uhrzeigers berechnen:
    $\varphi = \omega_m * (t - t_{SSW}) - \varphi_0$
    $\varphi = -2{,}7987$
11. Mit Gleichung 6 die Zeitgleichung berechnen.
    $ZG = 1440 / 2\pi * (\varphi - \alpha)$
    ZG = -7,41 = -7 min : -25 sec

Laut Tabelle beträgt die Zeitgleichung am 10. Januar 2011, 12 Uhr MEZ: -7 min: -23 sek.

In der folgenden Tabelle sind für einige Tage die berechneten und die tabellarischen Werte gegenübergestellt. Die Werte gelten für das Jahr 2011, jeweils 12 Uhr MEZ.

Datum	**t =**	**ZG berechnet**	**ZG aus Tabelle**
1. Jan.	0,5	-3 : 26	-3 : 24
1. Feb.	31,5	-13 : 32	-13 : 31
1. Mrz.	59,5	-12 : 24	-12 : 24
1. Apr.	90,5	-3 : 59	-3 : 59
1. Mai	120,5	+2 : 52	+2 : 51
1. Jun.	151,5	+2 : 14	+2 : 13
1. Jul.	181,5	-3 : 47	-3 : 48
1. Aug.	212,5	-6 : 21	-6 : 22
1. Sep.	243,5	-0 : 07	-0 : 07
1. Okt.	273,5	+10 : 13	+10 : 13
1. Nov.	304,5	+16 : 24	+16 : 24
1. Dez.	334,5	+11 : 06	+11 : 07

Literaturverweise:
[1] http://info.ifpan.edu.pl/firststep/aw-works/fsII/mul/mueller.html
[2] http://www.usno.navy.mil/USNO/astronomical-applications/data-services/earth-seasons

NACHTRAG

Zur Berechnung des Bahnwinkels (τ) wird das Datum des Periheldurchgangs benötigt. Das Perihel ist der Scheitelpunkt der Bahnellipse. Der kleinste Abstand zwischen Sonne und Erde wird Periapsis genannt. In einem Zweikörper-System sind Perihel und Periapsis identisch.
Nun wird die Erde vom Mond umkreist und dieser zerrt merklich an seinem Zentralgestirn. Es ist so, dass sowohl die Erde als auch der Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt kreisen. Der Schwerpunkt befindet sich innerhalb der Erde, etwa auf ¾ des Weges vom Erdmittelpunkt zur Erdoberfläche. Dieser Schwerpunkt beschreibt nun eine Keplerellipse um die Sonne, während der Erdmittelpunkt einmal im Monat um diesen Schwerpunkt kreist und somit eine verschlungene Bahn beschreibt. Weil die Bahn des Erdmittelpunkts demnach keine Ellipse ist, gibt es strenggenommen auch kein Perihel (wohl aber eine Periapsis).
In meinem Beitrag wird gesagt, man könne das Datum des Periheldurchgangs auf der Webseite des US Naval Observatory (Lit. [2]) nachschlagen. Hier wird unter dem Begriff „Perihelion“ aber der kleinste Abstand zwischen Sonnenmittelpunkt und Erdmittelpunkt verstanden, also die Periapsis (siehe http://aa.usno.navy.mil/faq/docs/apsides.php).
Durch die Schlangenlinienbahn der Erde in Verbindung mit der fast kreisförmigen Umlaufbahn des Schwerpunkts schwankt das Datum des „Perihelion“ (korrekt Periapsis) unregelmäßig in einer Bandbreite von etwa ±2 Tagen. (Mit der sogenannten Periheldrehung hat das selbstverständlich nichts zu tun). Im Gegensatz dazu weicht beispielsweise das Datum der Sommersonnenwende jeweils nur um wenige Minuten vom erwarteten Wert ab.
Für die Berechnung der Zeitgleichung nützt uns das Datum der Periapsis nichts, wir benötigen die Lage des Scheitelpunkts der Bahnellipse. Die Bahn des Schwerpunkts kann mit zulässiger Näherung als Erdbahn angesehen werden, die Schlangenbahn wirkt sich nach meinen Überlegungen mit maximal 0,4 Sekunden auf die Zeitgleichung aus.
Für die Lage des Scheitelpunkts habe ich keine genauen Angaben gefunden. Ich habe durch Versuche selbst ermittelt, dass der Abstand zwischen Sommersonnenwende und Scheitelpunkt etwa 168,9 Tage beträgt. Man sollte also nur das Datum der

Sommersonnenwende (t_{SSW}) nachschlagen und das Datum des Periheldurchgangs (t_P) berechnen: $t_P = t_{SSW} – 168{,}9$.
Im Jahr 2012 ist $t_{SSW} = 172{,}0$ und somit $t_P = 3{,}1$.
Mit diesem Wert weichen die berechneten Werte der Zeitgleichung um maximal 2 Sekunden von den Tabellenwerten ab.
Nach der Veröffentlichung des US Naval Observatory ist „Perihelion“ am 5. Januar, 02 Uhr MEZ, also $t_P = 4{,}08$. Mit diesem Wert erhält man größere Abweichungen von den Tabellenwerten.