Bestimmung der Deklination und Inklination der Zifferblatt-ebene durch Höhenmessungen

Rolf Wieland, Satteldorf, 1996, 2011

Zusammenfassung

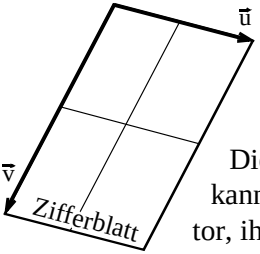
Die Anwendung nautischer Methoden zur Ortsbestimmung durch Höhenmessungen auf Probleme der Gnomonik bietet eine elegante und bequeme Möglichkeit, sowohl die Deklination als auch die Inklination eines ebenen Sonnenuhrenzifferblatts aus der einfachen Messung zweier Gestirnhöhen zu berechnen.

Inhalt

0.	Einleitung	1
1.	Theoretische Grundlagen	4
2.	Abweichung einer senkrechten Wand	7
3.	Höhenmessinstrumente	9
4.	Schnittpunkte der Höhengleichen	11
5.	Fehlerbetrachtung	14
6.	Berechnungsbeispiel	16
7.	Julianisches Datum	17
8.	Deklination, Rektaszension, Zeitgleichung	18
9.	Sternzeit	18

0. Einleitung

Die Aufgabe, die Lage einer beliebig orientierten Ebene im Raum zu bestimmen, erscheint nicht ganz einfach zu sein: erstens kann die Ebene in der Horizontalen aus der Ost-West-Richtung abweichen (deklinieren), und zweitens kann die Ebene auch noch gegen die Vertikale geneigt sein (inklinieren). Die Orientierung einer Ebene ist bestimmt durch ihre **zwei** Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Die Orientierung einer Ebene kann aber auch mit nur **einem** Vektor festgelegt werden, nämlich mit ihrem Normalenvektor $\vec{n}$ (Abb. 2.1). Der Normalenvektor weist zum Zenit Z_Z des Zifferblatts.



Die Orientierung der Ebene ist bestimmt durch ihre **zwei** Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Die Orientierung der Ebene kann auch mit nur **einem** Vektor, ihrem Normalenvektor $\vec{n}$, festgelegt werden.

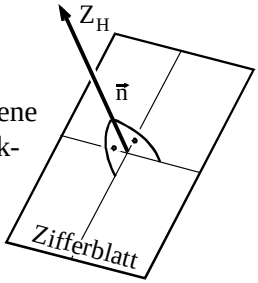


Abb. 2.1

Unter der **Deklination d** des Zifferblatts verstehen wir das **Südazimut** nach Westen, unter der **Inklination i** die **Höhe** des **Normalenvektors** der Zifferblattebene.

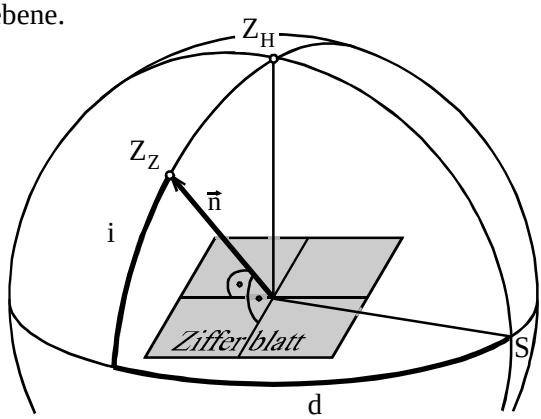


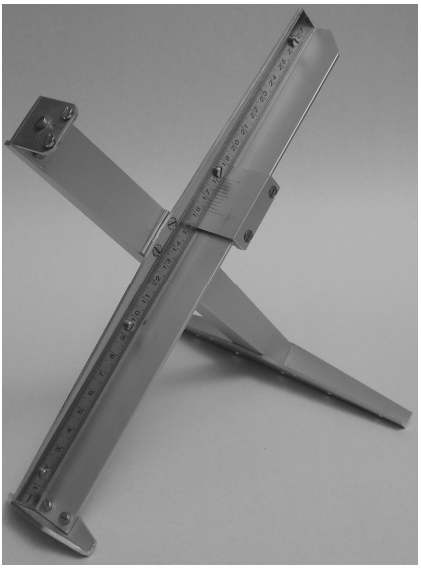
Abb. 2.2:
Deklination d und Inklination i des Zifferblatts

d: Südazimut nach Westen des Normalenvektors $\vec{n}$
i: Höhenwinkel des Normalenvektors $\vec{n}$ der Zifferblattebene
Z_Z: Zenit der Zifferblattebene
Z_H: Zenit der Horizontebene

Beispiele:

Vertikale Süduhr:	d=0 und i=0,
Horizontaluhr:	d unbestimmt und i=90°,
polare Ostuhr:	d=−90° und i=0,
äquatoriale Norduhr:	d=180° und i=φ,
äquatoriale Süduhr:	d=0 und i=−φ,
vertikale Norduhr:	d=180° und i=0.

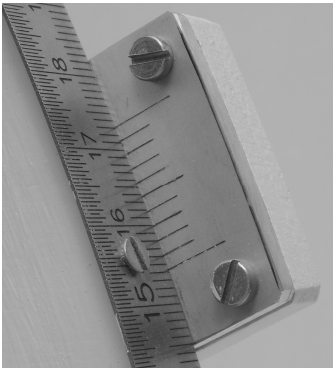
Höhenmessinstrumente, die man auf eine beliebig orientierte Ebene stellen kann, um die Höhe eines Gestirns über dieser Ebene zu messen



Kreuzquadrant

Ableseeinrichtungen mit Nonius

Spiegeloktant



1. Theoretische Grundlagen

Jede beliebig orientierte Zifferblattebene kann parallel so verschoben gedacht werden, dass sie Tangentialebene in einem bestimmten Ort B an die Erdkugel wird. Am Ort B liegt das Zifferblatt dann horizontal und der Normalenvektor geht durch den Erdmittelpunkt (Abb. 4). Diese Überlegung wird gerne „Versetzungsregel“ genannt.

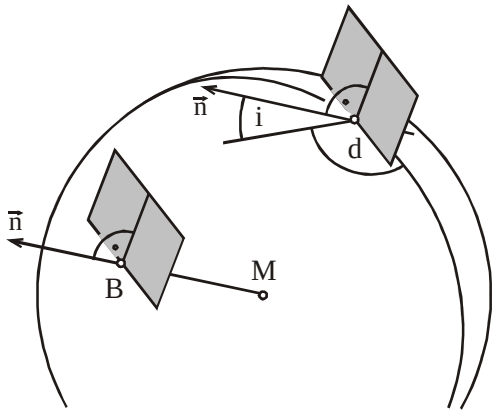


Abb. 4: Parallelverschiebung des Zifferblatts
an den Berührort B

Die Umkehrung dieser Überlegung besagt: Sind die Koordinaten des Berührorts bekannt, so können daraus die Deklination d und die Inklination i des Zifferblatts berechnet werden. Die geographischen Koordinaten von B werden durch astronomische Bestimmung des Punktes B mit den Methoden der Nautik zur Ortsbestimmung ermittelt. Die Projektion des nautischen Dreiecks auf die Erdkugel zeigt, dass die geographischen Koordinaten der Gestirnprojektion G' den astronomischen Koordinaten des Gestirns entsprechen, also nur zeitbedingt sind und nicht vom Standort B des Beobachters abhängen (Abb. 5.1).

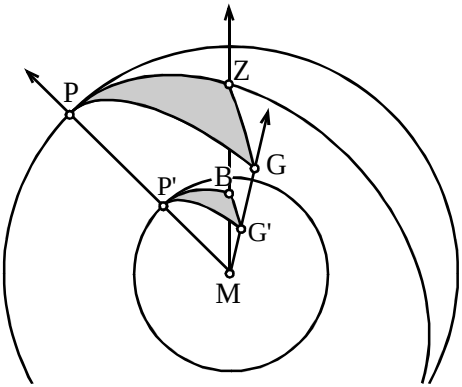


Abb. 5.1: Projektion des nautischen Dreiecksauf die Erdkugel

In der Nautik werden Ortsbestimmungen durch Messen der Höhen von Gestirnen über dem Horizont durchgeführt. Durch Auswertung einer Höhenmessung wird der Standort B an die Gestirnprojektion G' angeschlossen. Die Ortslinie aller Erdpunkte B, von denen aus das Gestirn unter dem Höhenwinkel h erscheint, ist der Kleinkreis um G' (Höhengleiche) mit einem Radius, der gleich der Zenitdistanz 90°–h ist (Abb. 5.2).

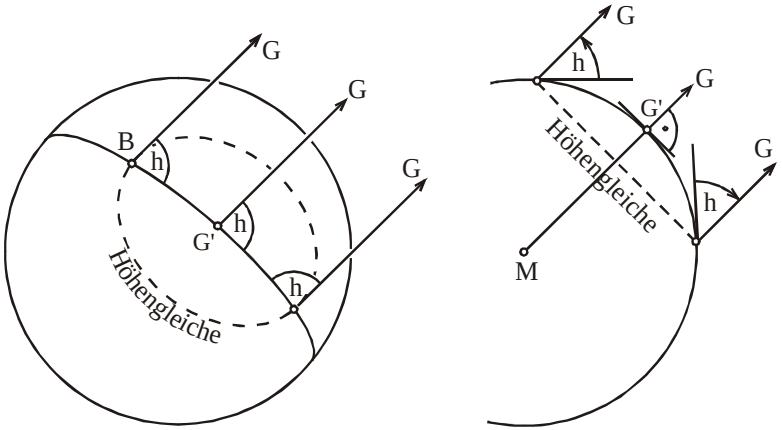


Abb. 5.2: Höhengleiche als Ortslinie aller Erdorte mit konstanter Zenitdistanz

Durch eine zweite Höhenmessung nach einem anderen Gestirn erhält man eine zweite Höhengleiche für den Beobachtungsort B. Aus zwei Höhenmessungen nach zwei Gestirnen und den Beobachtungszeiten ergibt sich die Lage des Beobachtungsorts als Schnittpunkt der beiden Höhengleichen (Zweihöhenproblem von **Carl Friedrich Gauß** (1777-1855). Die Entscheidung zwischen den beiden Schnittpunkten wird im Allgemeinen leicht möglich sein (Abb. 6.1).

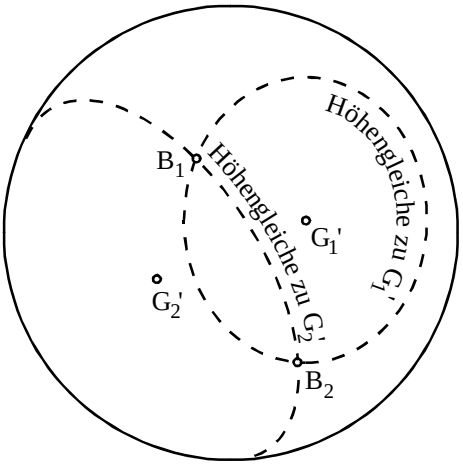


Abb. 6.1: Zweihöhenproblem von Carl Friedrich Gauß

Zur Ermittlung der Lage des Zifferblatts sind die Höhen h_Z der Gestirne über der Zifferblattebene zu messen und nicht die Höhen h_H über dem Horizont (Abb. 6.2).

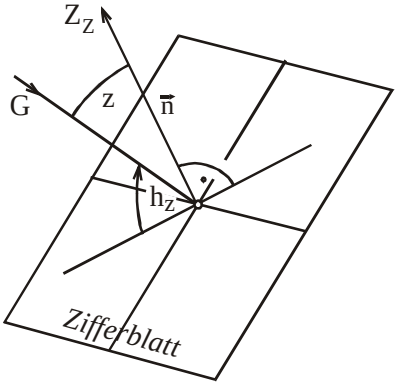


Abb. 6.2:
$\vec{n}$ Normalenvektor der Zifferblattebene
h_Z: Höhe des Gestirns über dem Zifferblatt
z: Zenitdistanz

Hierzu benötigt man ein geeignetes Winkelmessinstrument, das man beim Messen gegen das Zifferblatt halten kann. Mit dem Spiegelsextant werden Winkel gegen die Horizontale gemessen. Zur Messung der Höhenwinkel gegen die Zifferblattebene eignet sich zum Beispiel das bekannte Nagelbrett. Man misst die Nagellänge e und die Schattenlänge s und erhält daraus den Höhenwinkel h_Z der Sonne über der Wand (Abb. 7): $\tan h_Z = \frac{e}{s}$.

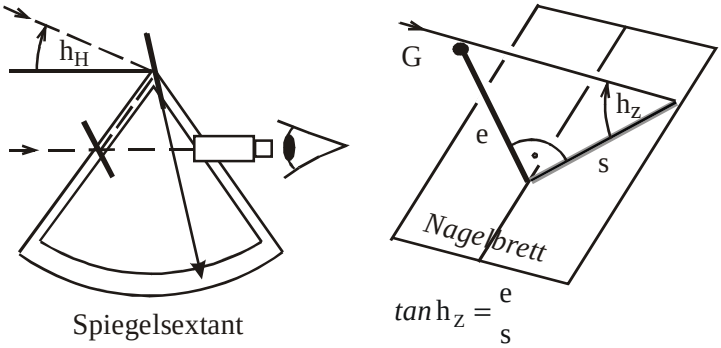


Abb. 7: Höhenmessinstrumente Spiegelsextant und Nagelbrett

2. Bestimmung der Abweichung bei einer senkrechten Wand

Bei einem Zifferblatt bekannter Inklination i liegt der Zenit Z_Z auf dem Höhenkreis in der Höhe i (Abb. 8.1). Beispiele sind eine Dachfläche bekannter Neigung oder eine senkrechte Wand, bei der Z_Z auf dem Horizont liegt. Also genügt zur Ortsbestimmung eine weitere Höhengleiche. Bei bekannter Inklination i lässt sich die Deklination d mit nur einer Höhenmessung bestimmen.

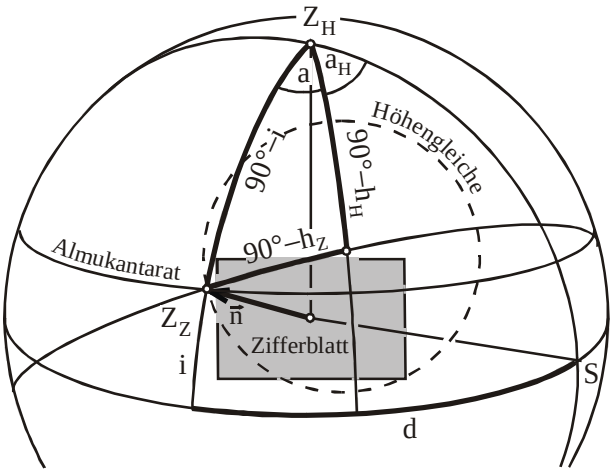


Abb. 8.1: Senkrechtes Zifferblatt

Ein senkrecht in die Wand geschlagener Nagel genügt zur groben Bestimmung der Höhe der Sonne über der Wand. Oft findet man auch noch andere Realisierungen eines Nagelbretts, die sich in natürlicher Weise an fast jeder Fassade eines Gebäudes befinden: ein senkrecht vorspringender Fenstersims, ein Feststellriegel für den Fensterladen, eine überstehende Deckplatte eines Pfeilers oder Mauervorsprungs und andere mehr (Abb. 8.2).

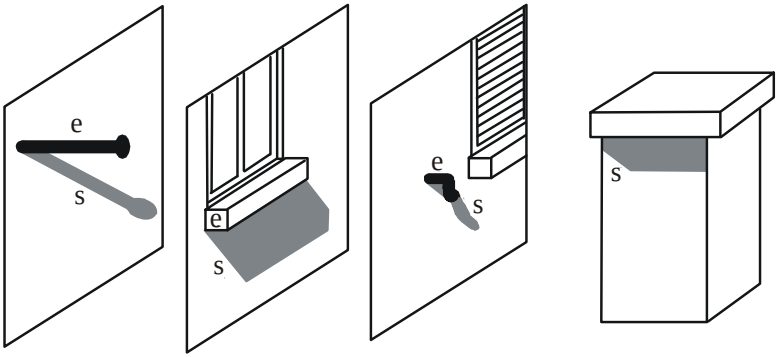


Abb. 8.2: Oft erfüllen schon vorhandene Bauteile die Funktion eines Nagelbretts

Man braucht nur mit einem Meterstab die Nagellänge e und die Länge s seines Schattens zu messen, um einen groben Näherungswert für die Wandabweichung d zu erhalten.

3. Kreuzquadrant und Spiegeloktant

Die beschriebene Methode zeichnet sich durch ihre einfache Handhabung aus. Sie hat den Vorteil, dass die tatsächliche Abweichung und Neigung des Zifferblatts an der betreffenden Stelle gemessen werden kann und nicht irgendein Mittelwert der mehr oder weniger krummen Wand wie bei der Streiflichtmethode oder mit dem Theodoliten.
Der Vorteil der einfachen Bauweise des Nagelbretts wird mit einem Nachteil erkauft: bei kleinem h_Z ist der Schatten lang und unscharf. Dadurch verliert die Messung an Genauigkeit. Überlegungen zur Verbesserung des Messergebnisses waren der Anlass, einen Kreuzquadrant mit den folgenden Eigenschaften zu bauen (Abb. 10.1):

1. Die Skala wird gegen die Wand unter 45° geneigt, so dass die Inklination weder bei h_Z=0 noch bei h_Z=90° weit entfernt erfolgt. Die Präzisionsuhren von Philipp Matthäus Hahn (1739-1790) zeigen, dass für hohe Genauigkeit keine großen Abmessungen nötig sind; im Allgemeinen genügen 15 bis 20 cm. Sonst macht sich die zunehmende Unschärfe des Schattenrands negativ bemerkbar. Die Anzeige sollte punktsymmetrisch sein. Dann wird nicht der Schattenrand bestimmt, sondern der Mittelpunkt mit einem auf der Skala verschiebbaren Läufer mit Strichkreuz und konzentrischem Einstellkreis zur exakten Justierung und Nonius zur genauen Ablesung.

2. Der Quadrant trägt daher ein Öhr für eine punktsymmetrische Anzeige, das in einer zur Skala parallelen Ebene liegt, wodurch auf der Skala stets ein kreisförmiges Sonnenbild entsteht.

Beim Kreuzquadrant gilt für den Höhenwinkel der Sonne über der Zifferblattebene $h_Z = h_O + arctan\frac{s}{e}$.

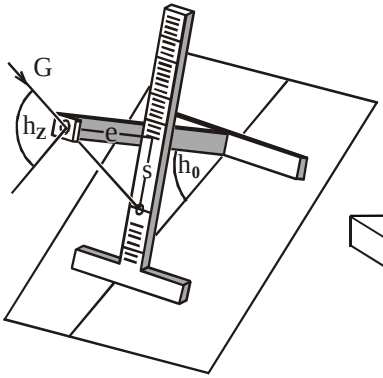


Abb. 10.1: Kreuzquadrant mit Öhr

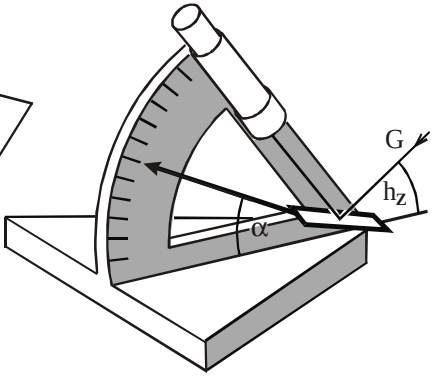


Abb. 10.2: Spiegeloktant mit Sucherfernrohr und drehbarem Spiegel

Mit einem entsprechend konstruierten Spiegeloktant (Abb. 10.2) lässt sich die Genauigkeit weiter verbessern, indem man in einem Sucherfernrohr mit Fadenkreuz zum Beobachtungszeitpunkt ein relativ zur Erde günstig positioniertes (vgl. 5. Fehlerbetrachtung) Gestirn anpeilt. Man ist dann nicht mehr auf den durch den Beobachtungszeitpunkt bestimmten Stundenwinkel und eine Gestirndeklination zwischen –23,5° und +23,5° festgelegt wie bei der Sonne.

Beim Spiegeloktant gilt für den Höhenwinkel des Gestirns über der Zifferblattebene: $h_Z = 90° - 2 \cdot \alpha$.

Mit beiden Geräten erhält man aus zwei Höhenmessungen sowohl die Deklination als auch die Inklination der Zifferblattebene, was für die Praxis selbst bei vermeintlich senkrechen Wänden von Vorteil ist, da bei höherer Genauigkeitsanforderung fast jede Fläche von der Idealrichtung in Deklination und Inklination abweicht.

4. Berechnung des Berührorts Z_Z als Schnittpunkt Z_1 oder Z_2 der beiden Höhengleichen

Berechnungsschema:
Gemessen werden die Höhen z_1 und z_2 der Gestirne G_1 und G_2 über der Zifferblattebene und die Beobachtungszeitpunkte in MEZ.
Gegeben sind die geographischen Koordinaten $(\lambda|\varphi)$ des Standorts und die astronomischen Koordinaten $(\alpha_1|\delta_1)$ und $(\alpha_2|\delta_2)$ der Gestirne und die Sternzeiten st_1 und st_2 für die Beobachtungszeitpunkte.
Berechnet werden die Stundenwinkel $t_1=st_1-\alpha_1$ und $t_2=st_2-\alpha_2$ und daraus die astronomischen Koordinaten $(a_1|h_1)$ und $(a_2|h_2)$ der Gestirne im Horizontsystem mit den bekannten Transformationsformeln: Äquatorebene → Horizontebene (Abb. 12):

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$$
$$\sin a \cdot \cos h = \cos\delta \cdot \sin t$$
$$\cos a \cdot \cos h = \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t - \cos\varphi \cdot \sin\delta$$

Die erste Gleichung folgt aus dem Seiten-Kosinussatz, die zweite Gleichung aus dem Sinussatz und die dritte aus dem Sinus-Kosinussatz im sphärischen Dreieck ZPS.

Für Winkel α, deren Beträge größer als 90° sein können, werden **zwei** trigonometrische Funktionen $\mathbf{x}=\boldsymbol{cos}\boldsymbol{\alpha}$ und $\mathbf{y}=\boldsymbol{sin}\boldsymbol{\alpha}$ angegeben. Daraus lässt sich der Winkel α mit der Funktion *atn*(x, y) über den halben Winkel eindeutig bestimmen:

$$\alpha = atn(x,y) = \begin{cases} 180° & \text{für } x = -1 \\ 2 \cdot \arctan\dfrac{y}{1+x} & \text{für } x \neq -1 \end{cases}$$

Aus z_1, z_2, h_1, h_2, a_1, a_2 können dann die Abweichung d und die Inklination i wie im Folgenden beschrieben berechnet werden.

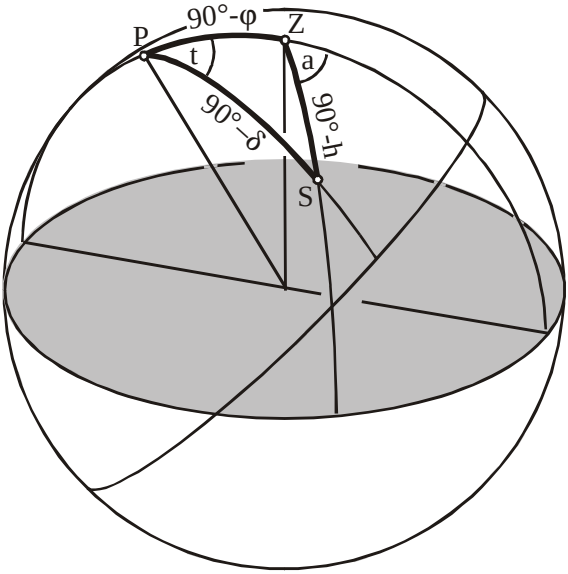


Abb. 12: System der Äquatorebene mit Pol P

4.1 Allgemeiner Fall (Abb. 13):

Seiten-Kosinus-Satz in Dreieck $G_1Z_HG_2$ mit $0 \le e \le 180°$:

$$\cos e = \sin h_1 \cdot \sin h_2 + \cos h_1 \cdot \cos h_2 \cdot \cos(a_2 - a_1)$$

Seiten-Kosinus-Satz in Dreieck $G_1Z_1G_2$ mit $0 \le \nu \le 180°$:

$$\cos \nu = \frac{\sin z_2 - \sin z_1 \cdot \cos e}{\cos z_1 \cdot \sin e}$$

Sinus-Satz und Seiten-Kosinus-Satz in Dreieck $G_1Z_HG_2$ mit $-180° < \omega \le 180°$:

$$\sin \omega \cdot \sin e = \cos h_2 \cdot \sin(a_2 - a_1)$$

$$\cos \omega \cdot \sin e = \frac{\sin h_1 \cdot \cos e - \sin h_2}{\cos h_1}$$

Seiten-Kosinus-Satz in Dreieck $G_1Z_HZ_{1/2}$ mit $-90° \le i \le 90°$:

$$\sin i = \sin z_1 \cdot \sin h_1 - \cos z_1 \cdot \cos h_1 \cdot \cos(\omega \pm \nu)$$

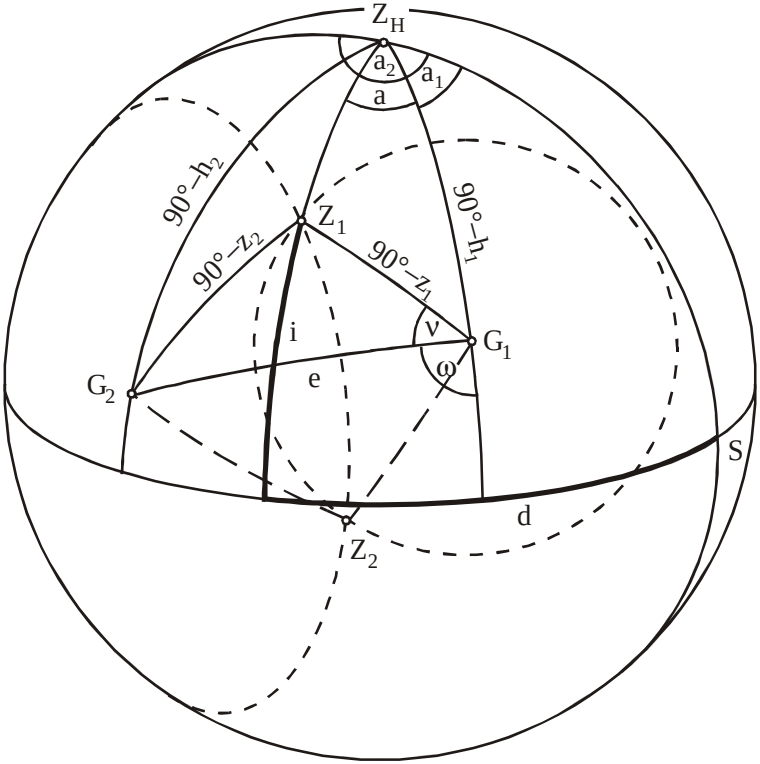


Abb. 13: Berechnung der Schnittpunkte Z_1 und Z_2 zweier Höhengleichen

Sinus-Satz und Seiten-Kosinus-Satz in Dreieck $G_1Z_HZ_{1/2}$ mit $-180° < a \leq 180°$:

$$sin\,a \cdot cos\,i = cos\,z_1 \cdot sin(\omega \pm \nu)$$

$$cos\,a \cdot cos\,i = \frac{sin\,z_1 - sin\,i \cdot sin\,h_1}{cos\,h_1}$$

$$d = a_1 + a$$

Für Winkel a zwischen −180° und +180° sind zwei trigonometrische Funktionen $x = cos\,\alpha$ und $y = sin\,\alpha$ angegeben. Daraus lässt sich der Winkel α mit der auf Seite 11 beschriebenen Funktion *atn*(x,y) eindeutig bestimmen.

4.2 Spezialfall: Wand bekannter Inklination i (Abb. 8.1):

Z_Z liegt dann auf dem Höhenkreis mit der Höhe i, also genügt zur Ortsbestimmung eine weitere Höhengleiche. Bei bekannter Inklination lässt sich die Deklination mit nur einer Höhenmessung bestimmen.

Im Kugeldreieck Z_ZGZ_H gilt nach dem Seiten-Kosinus-Satz für den Winkel a, um den sich die Deklination d und das Azimut a mit $0 \le a \le 90°$ unterscheiden:

$$\cos a = \frac{\sin h_Z - \sin i \cdot \sin h_H}{\cos i \cdot \cos h_H}$$

Also ist die Wandabweichung $d = a_H \pm a$.

Bei einer vertikalen Wand ist i=0 und man erhält aus obiger Gleichung für $0 \le a \le 90°$:

$$\cos a = \frac{\sin h_Z}{\cos h_H}$$ und daraus $d = a_H \pm a$.

5. Fehlerbetrachtung

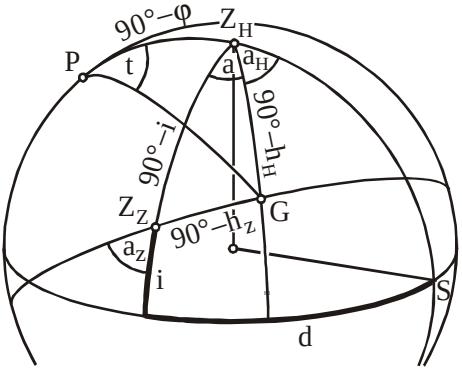


Abb. 14: Fehlerbetrachtung

5.1 Fehler bei einer Wand bekannter Inklination i:

Eine Fehlerdiskussion der Gleichung

$$\cos a = \frac{\sin h_Z - \sin i \cdot \sin h_H}{\cos i \cdot \cos h_H} \text{ ergibt}$$

$$\partial a = \frac{-\cos h_Z}{\sin a \cdot \cos i \cdot \cos h_H}\partial h_Z = \frac{-\partial h_Z}{\sin a_Z \cdot \cos i},$$

denn nach dem Sinus-Satz gilt

$$\sin a \cdot \cos h_H = \sin a_Z \cdot \cos h_Z .$$

Hierin ist a_Z das Azimut in der Zifferblattebene bezüglich der Falllinie.

Wird berücksichtigt, dass die Inklination der Wand auch mit einer Unsicherheit ∂i behaftet ist, so ergibt die Fehlerbetrachtung der obigen Gleichung

$$\partial a = \frac{-\partial h_Z}{\cos i \cdot \sin a_Z} - \frac{\sin h_Z \cdot \sin i - \sin h_H}{\sin a_Z \cdot \cos^2 i \cdot \cos h_Z}\partial i$$

$$= \frac{-\partial h_Z}{\cos i \cdot \sin a_Z} + \frac{\partial i}{\cos i \cdot \tan a_Z}$$

Für $\sin a_Z = \pm 1$ und $\tan a_Z = \pm\infty$, also für $a_Z = \pm 90°$, wird der Fehlerbetrag am kleinsten. Messungen zur Bestimmung der Deklination d sollten daher nicht im Meridian der Falllinie, sondern in der Nähe des 1. Vertikals zur Falllinie der Zifferblattebene durchgeführt werden.

5.2 Fehler bei einer Wand bekannter Deklination d:

Eine Fehlerdiskussion der Gleichung

$$\sin h_Z = \sin i \cdot \sin h_H + \cos i \cdot \cos h_H \cdot \cos a \text{ ergibt}$$

$$\cos h_Z \cdot \partial h_Z = (\cos i \cdot \sin h_H - \sin i \cdot \cos h_H \cdot \cos a)\partial i$$

$$\partial i = \frac{\cos h_Z}{\cos i \cdot \sin h_H - \sin i \cdot \cos h_H \cdot \cos a}\partial h_Z = \frac{\partial h_Z}{\cos a_Z},$$

denn nach dem Sinus-Kosinus-Satz gilt

$$\cos h_Z \cdot \cos a_Z = \sin h_H \cdot \cos i - \cos h_H \cdot \sin i \cdot \cos a .$$

Berücksichtigt man, dass die Deklination der Wand auch mit der Unsicherheit ∂a behaftet ist, so ergibt die Fehlerbetrachtung wie oben

$$\partial i = \frac{\partial h_Z}{\cos a_Z} + \cos i \cdot \tan a_Z \cdot \partial a .$$

Der Einfluss von ∂h_Z und ∂a auf i wird ein Minimum, wenn $\cos a_Z = 1$ und $\tan a_Z = 0$ ist, also für $a_Z = 0$. Messungen zur Bestimmung der Inklination i sind in der Nähe des Meridians der Falllinie des Zifferblatts durchzuführen.

6. Berechnungsbeispiel bei einer senkrechten Wand

a) Beobachtungsdatum 1.5.2011;
Ort: Freiburg $\lambda = -7{,}9°$; $\varphi = 48{,}0°$
Um MEZ=$14^h12^m=14{,}2^h$ wird die Höhe $h_Z = 13{,}54°$ der Sonne über der Wandebene gemessen.
b) Man berechnet zunächst nach Teil 7 die Differenz $T-T_0$ der julianischen Daten des Beobachtungszeitpunkts 1. Mai 2011, UT=$13{,}2^h$ und des Perihelzeitpunkts 3.Jan2010, UT=16^h zu $T-T_0=482{,}88$ und damit nach Teil 8 auf Seite 18 die Rektaszension $r = 38{,}33°$ und die Deklination $\delta = 15{,}05°$ und die Zeitgleichung zg=$2{,}9^m$.
Wie in Teil 9 beschrieben wird, berechnet man die Sternzeit $\Theta = 65{,}02°$ für UT=$13{,}2^h$ und $\lambda = -7{,}9°$.
Der Stundenwinkel t der Sonne ist $t = \Theta - r = 26{,}69°$.
c) Berechnung von Höhe h_H und Azimut a_H der Sonne bezüglich der Horizontebene mit den Transformationsformeln Äquatorebene→ Horizontebene auf Seite 11:
$a_H = 57{,}33°$ und $h_H = 49{,}40°$.
d) Berechnung der Wandabweichung d
Aus $\cos a = \frac{\sin h_Z}{\cos h_H}$ folgt mit $0 \le a \le 90°$: $a = 68{,}46°$.
Aus $d = a_H \pm a$ folgt $d = 111{,}32°$ oder $d = -25{,}60°$.

e) Fehlerabschätzung

Der Fehler in der Wandabweichung beträgt bei einer Messgenauigkeit von ±0,03° für h_Z: $\partial a = \pm 0{,}05°$.

Berücksichtigt man auch in der Wandneigung eine Ungenauigkeit von ±0,03°, so ist $\partial a = -\frac{\partial h_Z}{\sin a_Z} + \frac{\partial i}{\tan a_Z} = \pm 0{,}09°$.

Wenn die Sonne im 1. Vertikal steht, dann ist nach 5.1 der günstigste Zeitpunkt für die Bestimmung der Deklination. Dann ist Dreieck $Z_Z G Z_H$ rechtwinklig mit $a_Z \pm 90°$ und es gilt für den Stundenwinkel der Sonne $\cos t = -\tan\varphi \cdot \tan\delta$, also $t = \pm 107{,}37° = \pm 7^h 09{,}5^m$. Da nach b) $zg = 2{,}9^m$ und $\Delta\lambda = 28{,}4^m$ ist, steht die Sonne um $MEZ = 19^h 35^m$ oder $MEZ = 5^h 16^m$ im 1. Vertikal des Zifferblatts, der bei einer senkrechten Wand allerdings mit dem Horizont zusammenfällt. Die Messung sollte wegen der Refraktion bei einer Gestirnhöhe $h_H > 30°$ stattfinden, um eine brauchbare Genauigkeit zu erzielen.

7. Das julianische Datum jd

Zur Berechnung von $T - T_0$ in Teil 8 und der Sternzeit in Teil 9 braucht man die Zeitdifferenz zwischen dem Beobachtungsdatum und dem Periheldatum 3. Januar 2010, $UT = 16^h$. Dafür ist eine fortlaufende Tageszählung sehr geschickt.

Das julianische Datum gibt die Anzahl der Tage an, die seit dem 1. Januar des Jahres –4713, $UT = 12^h$, vergangen sind.

Die folgende Formel gilt vom 1. März 1900 bis 28. Februar 2100:

jd=int(365.25·y)+int(30.6·(m+1))+1720981.5+d+UT/24

y steht für das Jahr, m für den Monat, d für den Tag und UT für den Berechnungszeitpunkt in Weltzeit. In den Monaten Januar und Februar ist m um 12 zu erhöhen und y um 1 zu erniedrigen.

8. Berechnung von Deklination δ und Rektaszension r und den zugehörigen Werten der Zeitgleichung zg

Nach Montenbruck, Grundlagen der Ephemeridenrechnung, 1989_4, Seite 86, lassen sich die Werte der Mittelpunktsgleichung durch Fourierentwicklung nach der mittleren Anomalie berechnen:

$$\mu = 1{,}9146° \cdot sin\,M + 0{,}0200° \cdot sin\,2M + 0{,}0003° \cdot sin\,3M + ...$$

Die mittlere Anomalie $M = \frac{T - T_0}{T_a} \cdot 360°$ ist die Länge einer gleichförmigen mittleren Sonne vom Perigäum aus.

T_0 ist die Perihelzeit und L_0 die zugehörige Länge der Sonne, z.B.

T_0=2010Jan3,67 und L_0=283,112°.

T_a=365,2596 (anomalistisches Jahr) ist die Umlaufdauer der Erde, UT der Berechnungszeitpunkt in Weltzeit und e=23,44° die Schiefe der Ekliptik.

Mittlere ekliptikale Länge der Sonne: $l = M + L_0$
Wahre ekliptikale Länge der Sonne: $l_0 = l + \mu$
Rektaszension der wahren Sonne: $r = atn\,(\,cos\,l_0,\, sin\,l_0 \cdot cos\,e\,)$
Zeitgleichung: $zg = arcsin\,(\,sin\,(l - r)) \cdot 4min$
Deklination: $sin\,\delta = sin\,l_0 \cdot sin\,e$

9. Sternzeit

Zur Berechnung des Stundenwinkels t braucht man die Sternzeit Θ. Sie ist jeweils gleich dem augenblicklichen Stundenwinkel des Frühlingspunkts. Die Sternzeit Θ ist eine lokale Ortszeit und daher von der geographischen Länge λ abhängig.
Die folgende Formel gibt die mittlere Sternzeit Θ in Grad an. Dabei ist jd0 das julianische Datum um UT=0^h.

$$\Theta = 99.8446 + 0.9856 \cdot (jd0 - 2445685.5) + 15.0411 \cdot UT - \lambda.$$