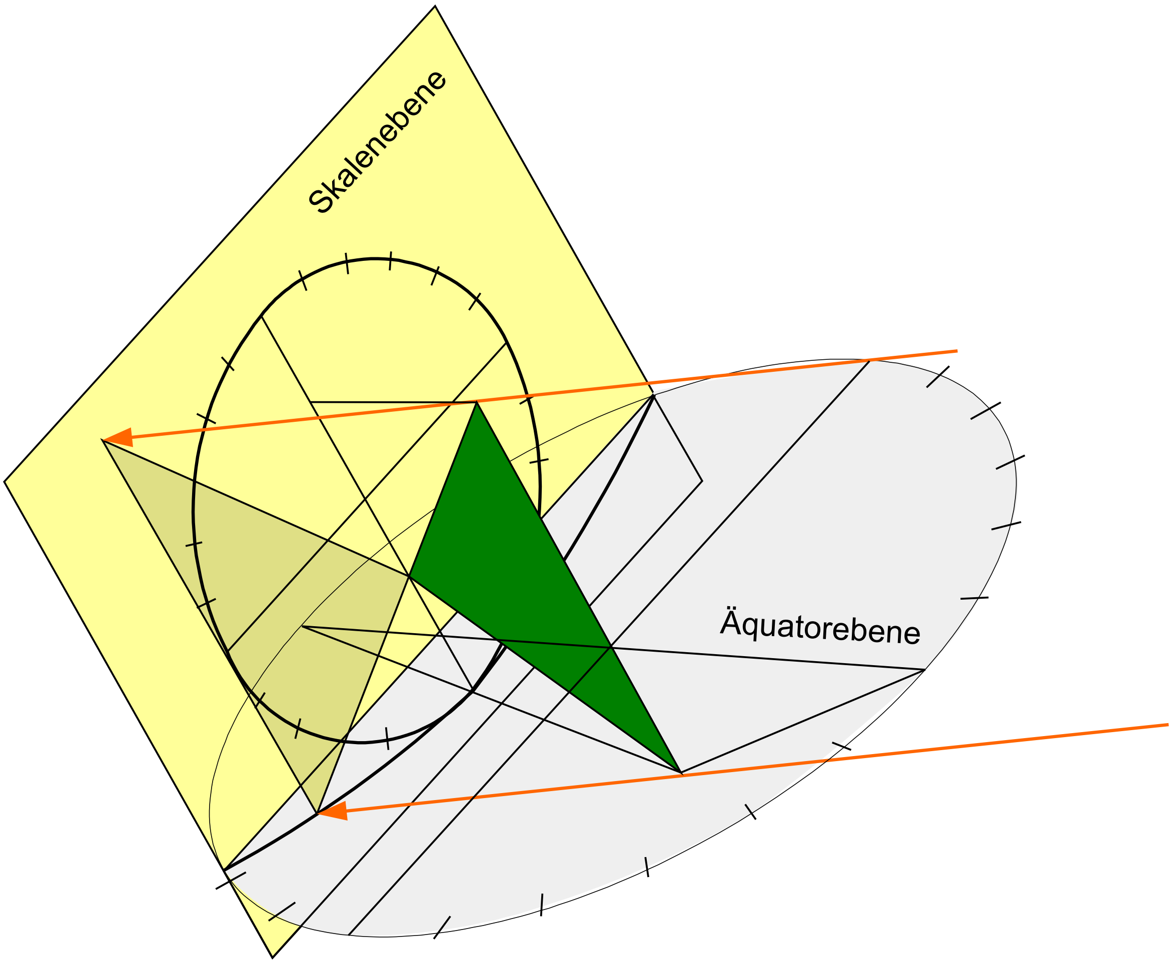
Foster-Lambert-Sonnenuhr und analemmatische Sonnenuhr

Im Februar 2012 wurde in diesem Blog die Bastelanleitung für eine polare Foster-Lambert-Sonnenuhr (auch rektilineare Sonnenuhr genannt) veröffentlicht, es fehlten aber jegliche Hinweise zum theoretischen Hintergrund dieser nicht leicht durchschaubaren Konstruktion. Mit diesem Beitrag soll versucht werden, das Geheimnis der Uhr zu lüften. Zum besseren Verständnis empfiehlt es sich natürlich, die Uhr erst einmal aufzubauen und auszuprobieren.

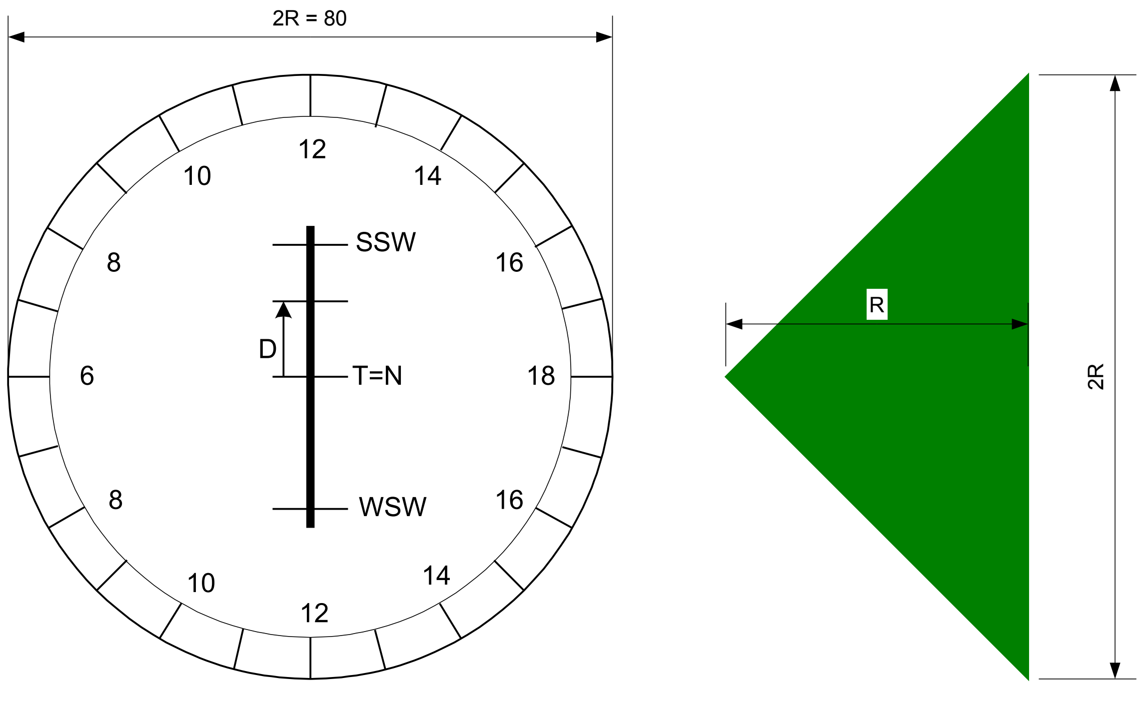


1. Konstruktion

Die Uhr verfügt über zwei linear (gleichmäßig) geteilte Zeitskalen von 6 bis 18 Uhr. Der Halbmesser des Skalenkreises sei $R = 4$ cm.
Der Schattenwerfer ist ein gleichseitiges, rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse eine Länge von 2R hat, die Höhe ist damit gleich dem Skalenradius R. Diese speziellen Abmessungen sind die Voraussetzung für das Funktionieren der Uhr.
Das Skalenblatt wird im Winkel der geografischen Breite aufgestellt. Die Spitze des Schattenwerfers steht auf dem Skalenblatt und seine obere Kante ist parallel zum Skalenblatt ausgerichtet. Wenn die Uhr richtig nach Süden hin ausgerichtet ist, liegt diese Kante also parallel zur Erdachse.
Der Schattenwerfer muss datumsabhängig im Sommer nach oben und im Winter nach unten um den Betrag D verschoben werden.
Es ist $D = R * \tan \delta$.
Darin ist δ die Deklination der Sonne (das ist der vom Himmelsäquator aus gemessene Winkel zur Sonne).
Es ist: $\sin \delta = \sin \Lambda * \sin \varepsilon$
Darin ist Λ die ekliptikale Länge der Sonne und $\varepsilon = 23{,}5°$ die „Schiefe der Ekliptik“.
Der Winkel Λ wird vom Frühlingspunkt aus in der Bahnebene der Sonne (Ekliptik) gemessen.
Ein ganzes Jahr entspricht 360° bzw. 365 Tagen, somit ist:
$\Lambda = 360°/365\text{Tg} * T$
Darin ist T die Anzahl der Tage seit Frühlingsanfang, der meist auf den 21. März fällt.

<u>Beispiel</u>: Am 31. März ist T = 10 Tage. Folglich ist $\Lambda = 9{,}9°$.
Damit erhält man $\sin \delta = 0{,}0686$ bzw. $\delta = 3{,}9°$ und schließlich
$D = 2{,}7$ mm
An den Sonnenwenden ist $\delta = +/-23{,}5°$ und somit $D = +/-17{,}4$ mm.

Damit sind die für die Funktion wichtigen Eckdaten bekannt.



<u>Bild 1</u>: Skalenblatt und Schattenwerfer

2. Beschreibung

In den Bildern 2 und 3 ist der Strahlenverlauf aus zwei verschiedenen Blickwinkeln gezeigt. Zur besseren Orientierung wurde eine blaue Linienskala eingezeichnet. Diese Skala gilt für jedes Datum, also für alle Einstellungen des Schattenwerfers. In den Morgen- und Abendstunden fallen die Sonnenstrahlen so flach ein, dass die Stundenmarkierungen außerhalb der Zeichnung liegen.

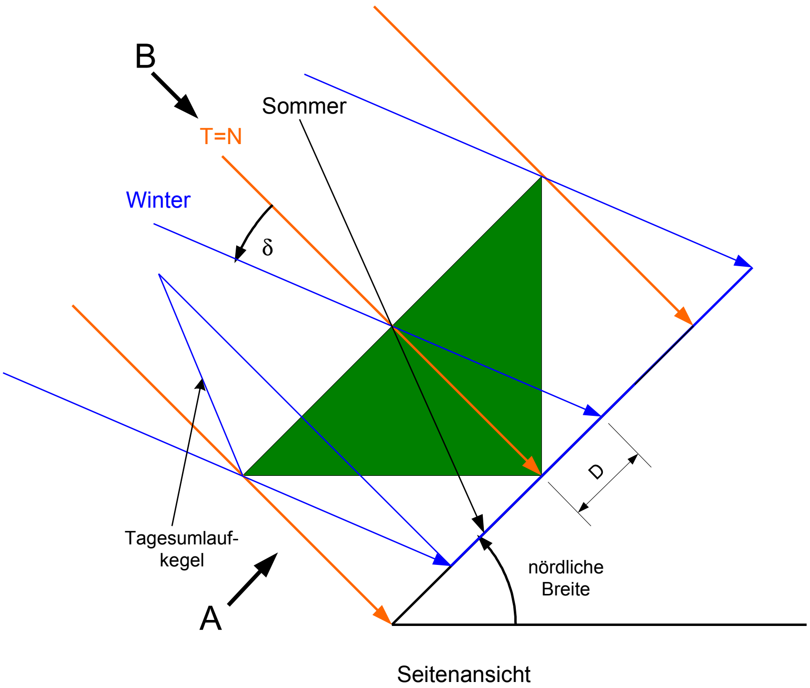


Bild 2: Datumsabhängiger Strahlenverlauf um 12 Uhr von der Seite gesehen.

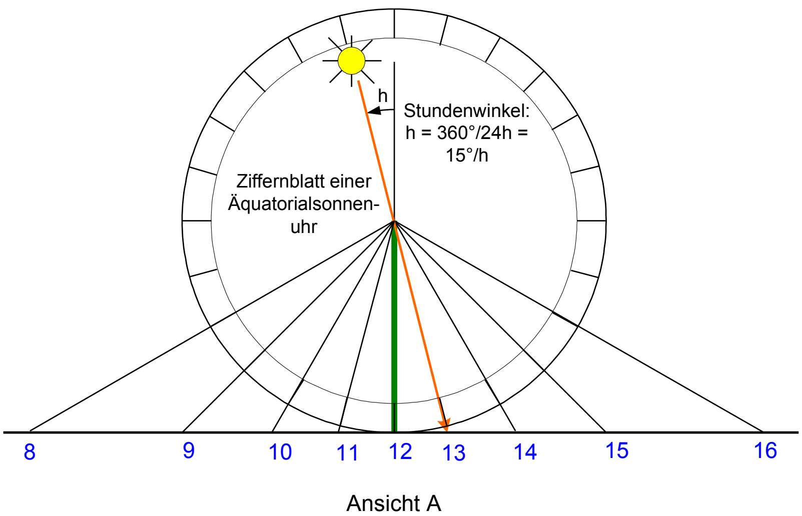


Bild 3: Strahlenverlauf während eines Tages aus Richtung A gesehen (datumsunabhängig).

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall der Tag-und-Nachtgleiche (T=N). An diesem Tag wird der Schattenwerfer so eingestellt, dass seine Spitze mit der Mitte des Skalenkreises übereinstimmt. Die Uhr wird nun so ausgerichtet, dass das Schattenbild des Schattenwerfers um 12 Uhr Ortszeit (WOZ) eine Linie ist, deren beide Enden den Skalenkreis bei den 12-Uhr-Marken berühren.
Vormittags und nachmittags ist das Schattenbild ein gleichseitiges Dreieck. Um die Mittagszeit ist es stumpfwinklig, gegen Morgen und Abend hin wird es immer spitzwinkliger. Dort, wo die Schattenkanten den Skalenkreis schneiden, liest man die Uhrzeit ab (beide Skalen zeigen immer die gleiche Uhrzeit). Um 6 Uhr und um 18 Uhr fallen die Sonnenstrahlen parallel zum Skalenblatt ein und das Schattenbild ist ein Strich. Zeiten vor 6 Uhr und nach 18 Uhr können nicht angezeigt werden, weil die Sonne dann von hinten auf das Skalenblatt scheint.

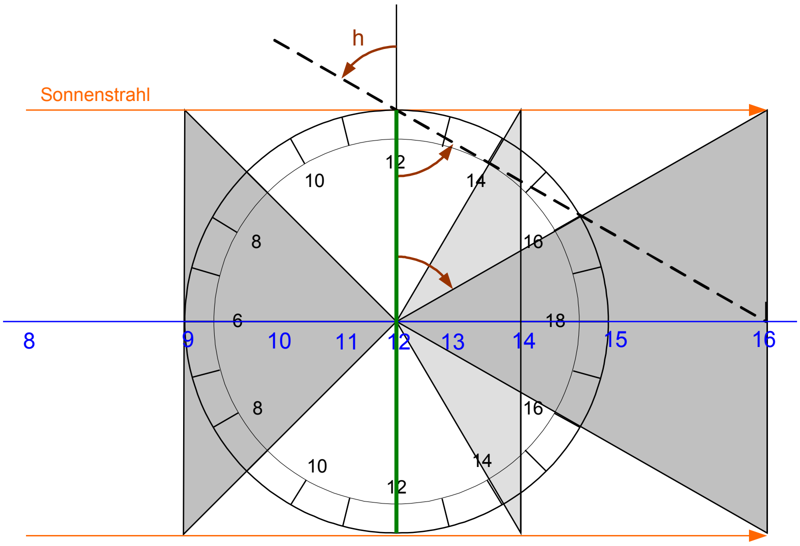


Bild 4: Schattenwurf bei Tag-und-Nachtgleiche um 9, 14 und 16 Uhr

Wie man leicht erkennt, tritt der in Bild 3 für eine Äquatorialsonnenuhr definierte Stundenwinkel h auch in der Skalenblattebene der Foster-Lambert-Sonnenuhr auf.
Für den speziellen Fall der Tag-und-Nachtgleiche gibt die Uhr also relativ leicht ihr Geheimnis preis.

Wir verlassen nun den Sonderfall der Tag-und-Nachtgleiche. Im Winter steht die Sonne unterhalb des Himmelsäquators, im Sommer oberhalb. Das Schattendreieck ist nun verzerrt.
Unter der Vorraussetzung, dass die Uhr funktioniert, kann man dieses Schattendreieck leicht konstruieren:
Man geht von der Spitze des Schattenwerfers aus und zieht zwei Linien über die gewählte Uhrzeit: Das sind die seitlichen Begrenzungslinien des Schattens. Die senkrechte Begrenzungslinie erhält man über den Stundenwinkel oder die blaue Linienskala.
Wir müssen nun aber anhand der Sonnenstrahlen zeigen, dass dies der tatsächliche Schattenwurf ist.
Die Sonnenstrahlen fallen parallel ein (zwei parallele, im Raum „schwebende“ Linien erscheinen unter allen Blickwinkeln parallel). Daraus folgt, dass alle senkrechten Linien in ihrer Originallänge abgebildet werden. Dies ist bei der Konstruktion offensichtlich der Fall (Strahlensatz!).

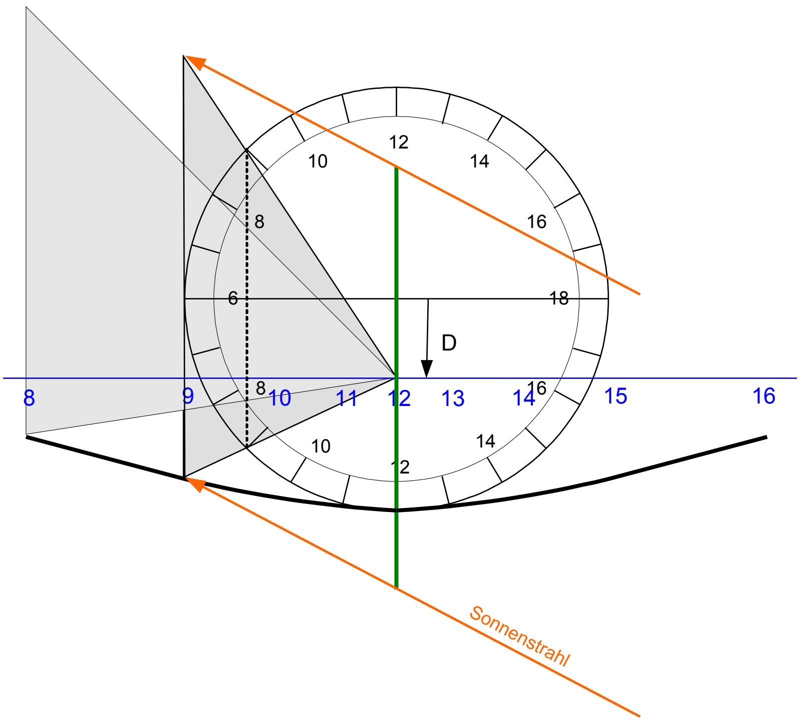


Bild 5: Konstruktion des Schattendreiecks aus der Uhrgeometrie

Zeichnet man mehrere Schattendreiecke, so findet man, dass sich die untere (und obere) Ecke des Dreiecks entlang einer gekrümmten Linie bewegt, die sich als Hyperbel erweist.

Man kann die Hypotenuse des Schattenwerfers auch als Polstab einer „normalen“ Sonnenuhr ansehen. Der Sonnenstrahl, der über die Spitze des Schattenwerfers fällt, beschreibt im Laufe des Tages einen Kegelmantel. Der Spitzenwinkel dieses Kegels hängt von der Deklination δ, also vom Datum ab. An den Tag-und-Nachtgleichen entartet der Kegelmantel zur Fläche. Der Punkt, an dem der Sonnenstrahl auf die Skalenfläche trifft, ist die Ecke des Schattendreiecks. Die miteinander verbundenen Punkte bilden einen Kegelschnitt, hier eine Hyperbel (siehe auch das Titelbild).
Warum der Schatten den Skalenkreis gerade bei der richtigen Uhrzeit schneidet, ist nicht unmittelbar klar. Dies soll im folgenden erläutert werden.

Bei der hier behandelten Ausführung handelt es sich im Grunde um zwei Uhren, die auch einzeln verwendbar wären. Die beiden schattenwerfenden Kanten des dreieckförmigen Schattenwerfers könnten auch Schattenstäbe sein. Es ist im Folgenden ausreichend, nur eine der beiden Uhren mit einem Schattenstab zu betrachten. Obwohl für das Beispiel nur die untere Skalenhälfte zur Anwendung kommt, ist doch der ganze Skalenkreis gezeichnet.
Bei der Uhr ist das Skalenblatt senkrecht zur Äquatorebene ausgerichtet. Man kann sich vorstellen, dass dieses Skalenblatt durch Parallelprojektion des Skalenblatts einer äquatorialen Sonnenuhr in die neue Ebene entsteht.
Die im Bild 6 blau gezeichneten Projektionslinien verlaufen im Winkel von 45°, also parallel zum grün gezeichneten Schattenstab. Das projizierte Bild ist wieder ein Kreis gleicher Größe.

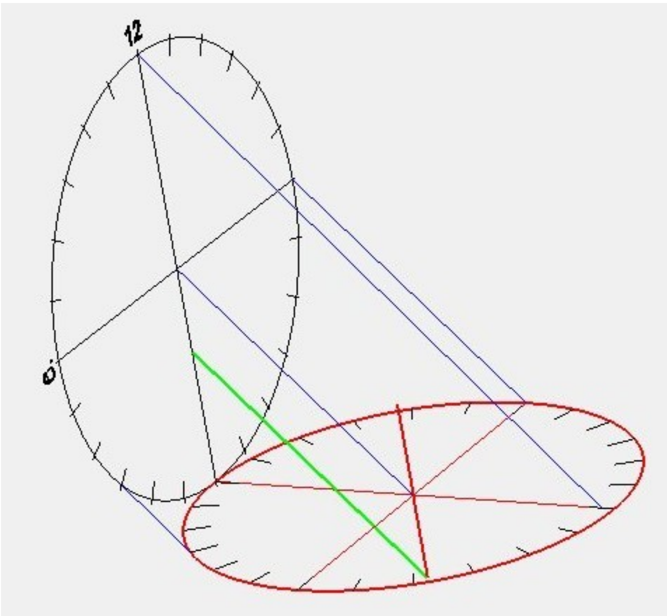


Bild 6: Entstehung des Skalenblatts (schwarz) durch Parallelprojektion eines in Äquatorebene liegenden Skalenblatts. Projektionsrichtung ist die Richtung des grünen Schattenstabs. Die Projektionslinien sind blau gezeichnet.

Die im Bild 7 gezeichnete Situation stellt einen Fall im Winter dar. Der Schattenstab ist nach unten verschoben. Die Sonne steht unterhalb des Äquators und die gelb gezeichneten Sonnenstrahlen fallen also von unten her auf das durchsichtig gedachte rote Skalenblatt der äquatorialen Sonnenuhr.
Der gelb gezeichnete unterste Sonnenstrahl fällt über die Stabspitze und trifft bei der 9-Uhr-Marke auf das Skalenblatt der äquatorialen Uhr (Merke: Die Spitze des Stabs ist identisch mit der Spitze des dreieckförmigen Schattenwerfers und dessen Hypotenuse entspricht dem Stab der äquatorialen Uhr). Diese Uhr würde also 9 Uhr anzeigen. Dieser Strahl geht nun weiter und trifft auf die Skalenebene der Foster-Lambert-Uhr. Der Auftreffpunkt ist das Ende des Schattenzeigers. Dieser Schattenzeiger schneidet den Skalenkreis bei der 9-Uhr-Marke. Warum?
Die auf den Schattenstab auftreffenden Sonnenstrahlen hinterlassen eine Schattenebene. Diese Ebene wird durch den Schattenstab und den untersten Sonnenstrahl „aufgespannt" (definiert). Die schwarz gezeichneten, zum Schattenstab parallelen Linien liegen alle in dieser Schattenebene. Die unterste dieser Linien ist eine blau gezeichnete Projektionslinie. Diese Linie liegt einerseits in der Schattenebene und geht andererseits von der 9-Uhr-Marke des roten Skalenblatts zur 9-Uhr-Marke des schwarzen Skalenblatts. Also muss der Schattenzeiger den Skalenkreis bei der 9-Uhr-Marke schneiden.
Eigentlich ganz einfach!?
Die zentralen Bedingungen sind folgende:
1. Die Stabrichtung muss gleich der Projektionsrichtung sein.
2. Der Stab muss datumsabhängig so verschoben werden, dass der über seine Spitze fallende Sonnenstrahl gerade den Skalenkreis der äquatorialen Uhr streift.

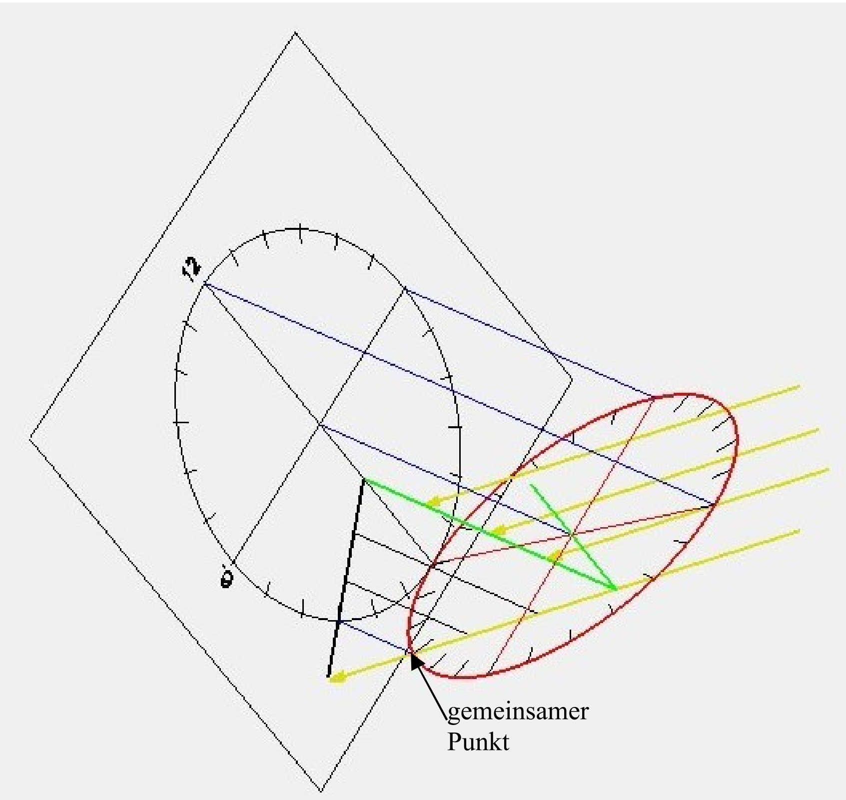


Bild 7: Strahlenverlauf und Schattenebene

Horizontale Foster-Lambert-Sonnenuhr
Das genannte Prinzip lässt sich auch anwenden, wenn die Projektionsebene nicht senkrecht auf der Äquatorebene steht. Die Projektionsebene kann zum Beispiel auch waagerecht liegen. Man erhält dann eine horizontale Foster-Lambert-Sonnenuhr.

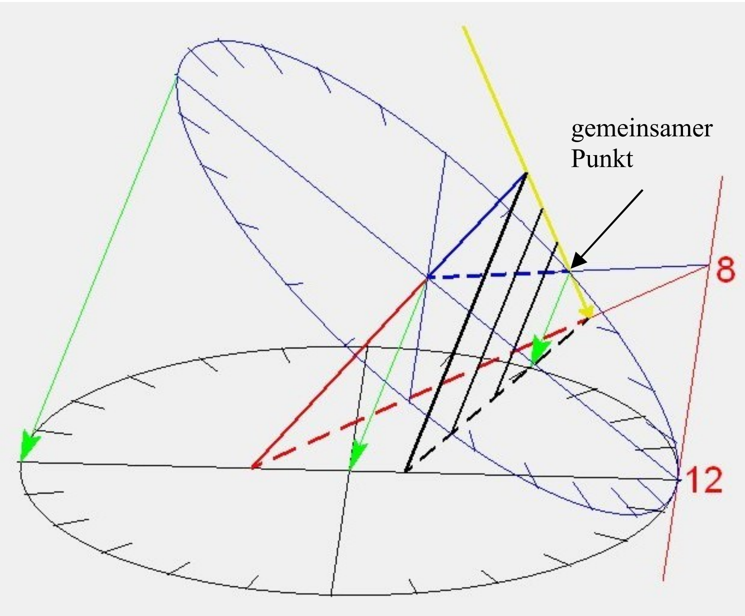


Bild 8: Schwarz = waagerechte Foster-Lambert-Uhr, blau = äquatoriale Polstabuhr, rot = waagerechte Polstabuhr. Die Schattenlinien sind gestrichelt gezeichnet.
Die Schattenstäbe der äquatorialen und der Foster-Lambert-Uhr sind gerade so lang gezeichnet, dass der über die Stabspitze fallende Sonnenstrahl (gelb) zum gegebenen Datum gerade den Skalenkreis der äquatorialen Uhr streift (hier bei der 8-Uhr-Marke). In Wirklichkeit wird man die Stäbe länger machen, sie müssen sich dann in dem gegebenen Punkt schneiden.

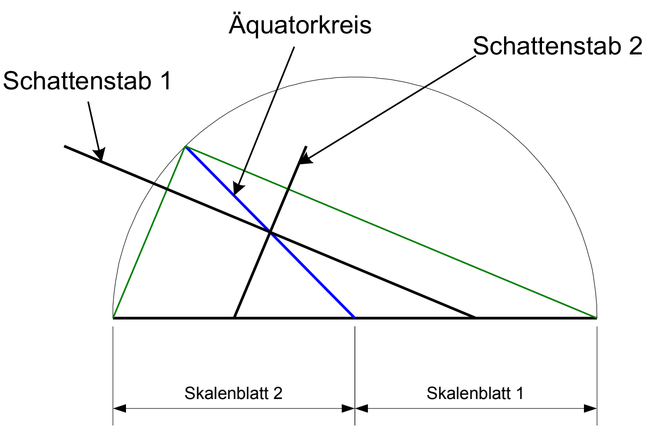


Bild 9: Es sind jeweils zwei Projektionsrichtungen möglich.

Analemmatische Sonnenuhr

Unter Beachtung der Konstruktionsregeln kann man Uhren mit den verschiedensten Geometrien herstellen. Man kann zum Beispiel das Ziffernblatt waagerecht legen und den Schattenstab senkrecht stellen. Dann muss die Projektionsrichtung ebenfalls senkrecht sein. Aus dem runden Ziffernblatt der äquatorialen Uhr wird dann eine Ellipse. Diese Uhren werden unter dem Namen „analemmatische Uhren“ subsummiert. Die Namensherkunft scheint nicht ganz klar zu sein, man kennt den Begriff „Analemma“ eher im Zusammenhang mit der Zeitgleichung.

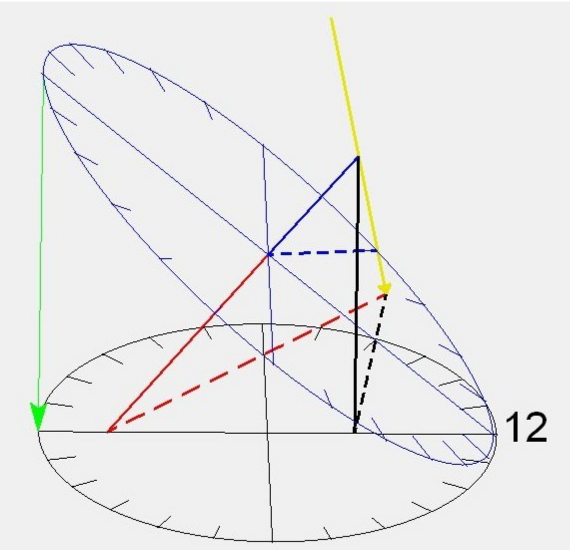


Bild 10: Waagerechte analemmatische Uhr mit senkrechtem Schattenstab (schwarz). Die Schatten sind jeweils gestrichelt gezeichnet.

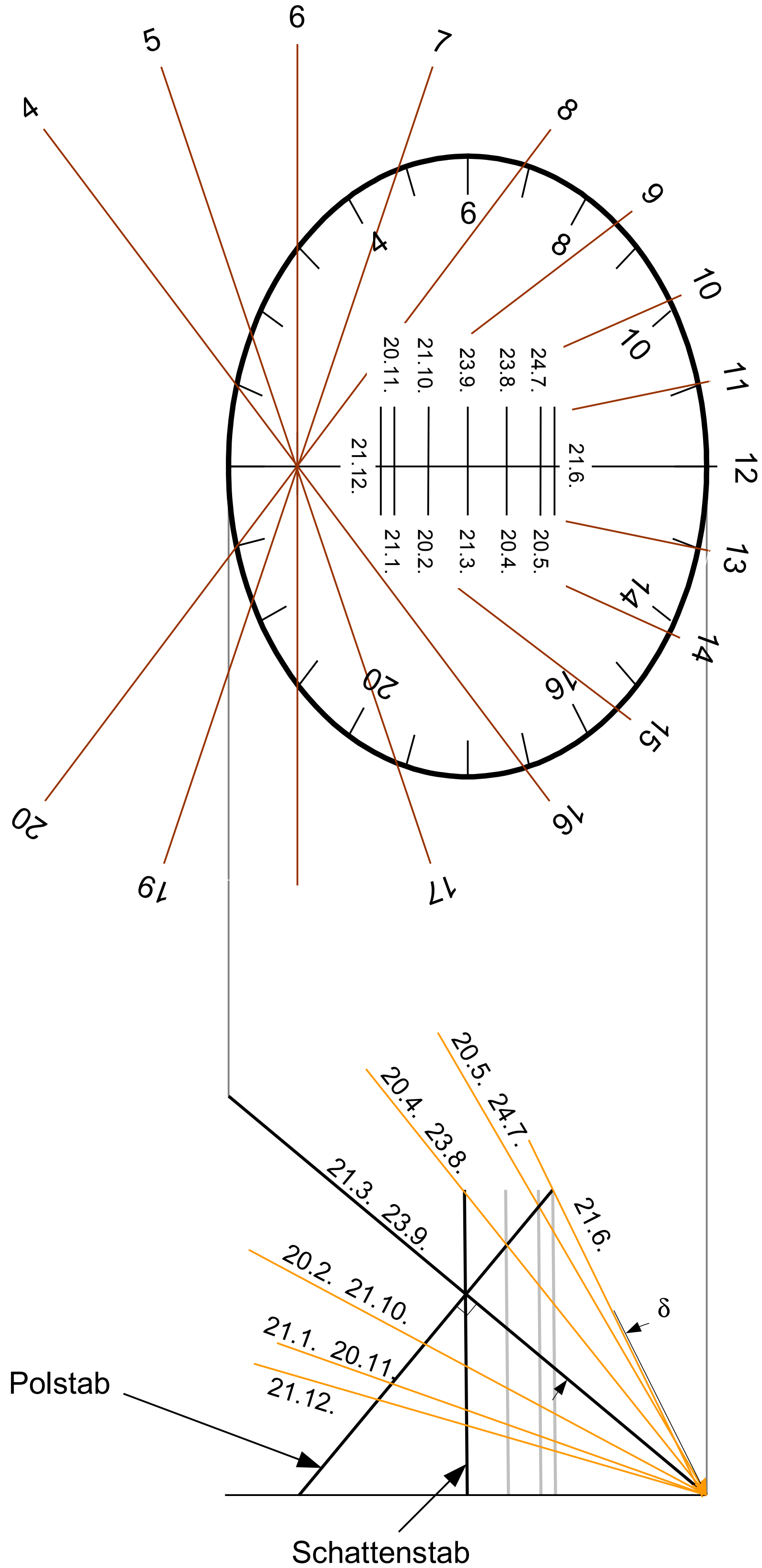


Bild 11: Skalenblatt einer waagerechten analemmatischen Uhr mit senkrechtem Schattenstab und einer waagerechten Polstabuhr (gültig für 50° nördlicher Breite).