ORTWIN FEUSTEL – GLASHÜTTEN

Schattenwinkelmesser und vertikale Spinnensonnenuhr: ein reizvoller Vergleich

In die mathematische Behandlung von Schattenwinkelmesser und vertikaler Spinnensonnenuhr fließen ein: die Standortparameter geografische Breite, geografische Länge und Wanddeklination; die Zeitgrößen Gregorianische Jahreszahl, Jahrestageszahl, Weltzeit, Ortszeitkorrektur und Zeitgleichung; die von den Zeitgrößen abhängigen Sonnenkoordinaten im festen Äquatorsystem und im Horizontsystem.

Sichtbares Merkmal der beiden Geräte ist der Schattenwurf des Gnomons. Den Winkel zwischen dem Gnomonschatten und der Senkrechten durch den Gnomonfußpunkt bestimmt das Zusammenspiel von Sonnenazimut und Sonnenhöhe. Während der Schattenwinkel beim Schattenwinkelmesser als Messgröße in die Berechnung der Zielgröße Wanddeklination eingeht, ist er bei der vertikalen Spinnensonnenuhr die Zielgröße für das Zifferblatt-Layout.

Anhand ihrer spezifischen Rechenschemata sowie mit konkreten Ausführungsbeispielen werden der Schattenwinkelmesser und die vertikale Spinnensonnenuhr verglichen.

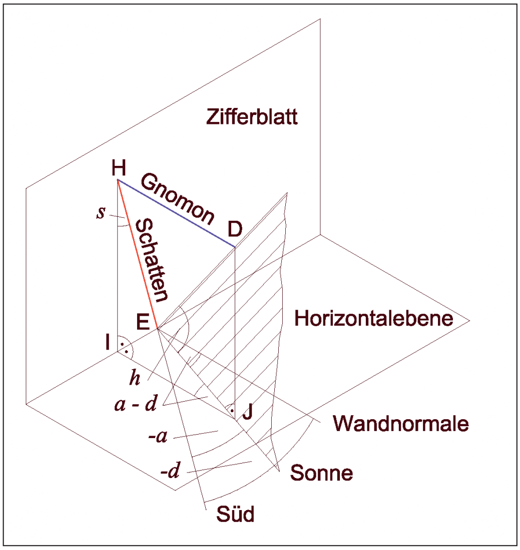

Abb. 1 Das Zusammenspiel von Wanddeklination d, Sonnenhöhe h und Sonnenazimut a bestimmt den Schattenwurf – Schattenwinkel s – eines Gnomons; der Gnomon bildet mit der Schattenebene (Zifferblatt) einen rechten Winkel.

Benutzte Formelzeichen und ihre Bedeutung

Originäre Größen

s	Schattenwinkel: am Schattenwinkelmesser zwischen dem Gnomonschatten und der Senkrechten durch den Gnomonfußpunkt abgelesener Winkel
d	Wanddeklination: bei der Berechnung der vertikalen Spinnensonnenuhr zu berücksichtigende Abweichung der betreffenden Wand von der Ost-West-Richtung
Y, M, D	Gregorianisches Datum: Jahr, Monat, Tag
MEZ/MESZ	Mitteleuropäische Zeit / Mitteleuropäische Sommerzeit
ϕ, λ	geografische Breite und Länge

Diese originären Größen (Meßgrößen) fließen als unabhängige Variablen in die zu berechnenden Größen der folgenden Abschnitte ein.

Abgeleitete zeitliche Größen

N	Jahrestageszahl eines Gregorianischen Jahres
UT	Universal Time = Weltzeit = Greenwicher Zeit
JDO	Julianische Tageszahl für 0.0 Januar einer Gregorianischen Jahreszahl; Julianische Tageszahl: Anzahl Tage, die seit dem 1. Januar 4713 v. Chr., 12^h UT, vergangen ist
JD	Julianische Tageszahl für ein Gregorianisches Datum
T	Anzahl der Jahrhunderte ab J2000.0; J2000.0: Abkürzung für JD 2451545,0 entsprechend Standardepoche 1. Januar 2000, 12^h UT

L	mittlere Länge: Winkelabstand vom Frühlingspunkt, wenn sich die Erde gleichmäßig auf einer Kreisbahn in der Äquatorebene um die Sonne bewegen würde
G	mittlere Anomalie: Winkelabstand vom Perihel, wenn sich die Erde gleichmäßig auf einer Kreisbahn in der Äquatorebene um die Sonne bewegen würde
Λ	ekliptikale Länge: Winkelabstand zum Frühlingspunkt auf der Ekliptik; Zählung in Richtung des jährlichen Umlaufs um die Sonne

ZG_a	anomalistische (auf die Apsiden bezogene) Zeitgleichungskomponente: Zeitgleichungsanteil infolge elliptischer Erdbahn
ZG_t	tropische (auf den Frühlingspunkt bezogene) Zeitgleichungskomponente: Zeitgleichungsanteil infolge Ekliptik
ZG	Zeitgleichung
OZK	Ortszeitkorrektur
WOZ	Wahre Ortszeit
ε	Schiefe der Ekliptik: Winkel zwischen Ekliptik und Äquator

Sonnenkoordinaten

δ	Deklination
τ	Stundenwinkel
h	Höhe
a	Azimut

Zielgrößen

d	Wanddeklination: aus dem abgelesenen Schattenwinkel des Schattenwinkelmessers berechnete Abweichung der betreffenden Wand von der Ost-West-Richtung
s	Schattenwinkel: berechneter Winkel zwischen dem Gnomonschatten und der Senkrechten durch den Gnomonfußpunkt der vertikalen Spinnensonnenuhr

Gestalterische Größen

R	Radius für Deklinationskreis (Datumskreis) der Spinnensonnenuhr
R_W	Radius für $\delta = -23{,}44°$ (Wintersolstitiumskreis)
R_S	Radius für $\delta = +23{,}44°$ (Sommersolstitiumskreis)
F	Faktor: Zählgröße für Deklinationskreise zwischen Winter- und Sommersolstitium
x, y	Koordinaten für Stundenlinien der Spinnensonnenuhr
O	Gnomonlänge
B_S	Gnomondurchmesser
B_K	Kernschattenbreite
U	Schattenlänge
DE	Abstand zwischen Gnomonspitze und Schattenspitze

Berechnungsgrundlagen

Schattenwurf des waagerechten Gnomons

Für den Schattenwurf des waagerechten Gnomons auf einer vertikalen Fläche soll zunächst der trigonometrische Zusammenhang zwischen Schattenwinkel, Wanddeklination, Sonnenhöhe und Sonnenazimut aufgezeigt werden.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken IHE, IEJ und JED von Abb. 1 liest man ab

$$(1)\ \tan s = \frac{IE}{HI},$$

$$(2)\ \sin(a-d) = \frac{IE}{EJ},$$

$$(3)\ \tan h = \frac{DJ}{EJ} = \frac{HI}{EJ}.$$

(1) und (2) nach IE umgeformt und gleichgesetzt ergibt

$$(4)\ HI \cdot \tan s = EJ \cdot \sin(a-d).$$

Mit (3) lautet letztlich die gesuchte Relation

$$(5)\ \sin(a-d) = \tan h \cdot \tan s.$$

Abgeleitete zeitliche Größen
Die nachstehenden Gleichungen orientieren sich im wesentlichen an [1] und [2].

Die Funktion floor(x) oder INT(x) liefert die größte ganze Zahl ≤ x.

Für die Jahrestageszahl ab 1. Januar eines Jahres gilt bei einem Schaltjahr

$$(6)\ N1 = \text{floor}(\frac{275 \cdot M}{9}) - 1 \cdot \text{floor}(\frac{M+9}{12}) + D - 30,$$

bei einem Gemeinjahr

$$(7)\ N2 = \text{floor}(\frac{275 \cdot M}{9}) - 2 \cdot \text{floor}(\frac{M+9}{12}) + D - 30.$$

Beispiel für Schaltjahr 2000, 25. Mai:
$M = 5, D = 25, N1 = 146$.
Beispiel für Gemeinjahr 1995, 25. Mai:
$M = 5, D = 25, N2 = 145$.

Mit der Zwischengröße

$$(8)\ A = \text{floor}(\frac{Y-1}{100})$$

bekommt man die Julianische Tageszahl für 0.0 Januar einer Gregorianischen Jahreszahl aus

$$(9)\ JD0 = \text{floor}(365{,}25 \cdot (Y-1)) - A + \text{floor}(\frac{A}{4}) + 1721424{,}5.$$

Beispiele hierfür sind:

Y	2000	2004	2005	2006	2007	2008	2009
A	19	20	20	20	20	20	20
$JD0$	2451543,5	2453004,5	2453370,5	2453735,5	245100,5	2454465,5	2454831,5

Die Julianische Tageszahl für ein Gregorianisches Datum ergibt sich schließlich unter Beachtung von (6) bzw. (7) und (9) zu

$$(10)\ JD = JD0 + N + \frac{UT}{24}$$

mit
(11) $UT = MEZ - 1\ h = MESZ - 2\ h$

Minuten und Sekunden der UT werden als Dezimalen an die Stunden angefügt. Ein Julianischer Tag beginnt stets um 12^h .

Zum Berechnen der zeitlich veränderlichen Zeitgleichungswerte wird mit (10) zuerst die Anzahl der Jahrhunderte ab Standardepoche J2000.0 benötigt

$$(12)\ T = \frac{JD - 2451545{,}0}{36525}.$$

Diese Relation geht ein in die mittlere Länge

$$(13)\ L = \text{mod}\,(280{,}46 + 36000{,}770 \cdot T, 360)$$

und die mittlere Anomalie

(14) $G = \text{mod}\ (357{,}528 + 35999{,}050 \cdot T, 360)$

Beide Größen bestimmen wiederum die ekliptikale Länge
(15) $\Lambda = L + 1{,}915 \cdot \sin G + 0{,}020 \cdot \sin\ 2G$.

Die Funktion mod(x, y) liefert den Rest der Division von x durch y; das Ergebnis hat das gleiche Vorzeichen wie x.

$L - \Lambda$ verkörpert die anomalistische Zeitgleichungskomponente, in Minuten ausgedrückt,
(16) $ZG_a = 4 \cdot (-1{,}915 \cdot \sin G - 0{,}020 \cdot \sin 2\ G)$.

Die tropische Zeitgleichungskomponente, ebenfalls in Minuten, lautet mit den Werten von (15)
(17) $ZG_t = 4 \cdot (2{,}466 \cdot \sin 2\Lambda - 0{,}053 \cdot \sin 4\Lambda)$.

Die Summe aus (16) und (17) ist die Zeitgleichung
(18) $ZG = ZG_a + ZG_t$.

Die Zeitgleichung wird zum Ermitteln der Wahren Ortszeit
(19) $WOZ = MEZ + ZG - OZK$

benötigt, wobei die Ortszeitkorrektur von der geografischen Länge abhängt

$$(20)\ OZK = \frac{(15 - \lambda) \cdot 4}{60};$$

Die Ergebnisse von (19) und (20) liegen jeweils in Stunden vor.

Die zeitliche Veränderung der Schiefe der Ekliptik gibt mit (12) die folgende Relation wieder

(21) $\varepsilon = 23{,}4393 - 0{,}01300 \cdot T$.

Sonnenkoordinaten

In Gleichung (5) kommen u. a. Sonnenhöhe und -azimut vor. Die bekannten Beziehungen zwischen den Koordinaten im Horizontsystem und im festen Äquatorsystem lauten hierfür

(22) $h = \arcsin(\sin\phi \cdot \sin\delta + \cos\phi \cdot \cos\delta \cdot \cos\tau)$

und

(23) $a = \arctan\left(\frac{\sin\tau}{\sin\phi \cdot \cos\tau - \cos\phi \cdot \tan\delta}\right)$.

Zum Berechnen beider Koordinaten müssen neben der geografischen Breite, der Stundenwinkel und die Deklination der Sonne bekannt sein:

(24) $\tau = (WOZ - 12) \cdot 15$

mit Bezug auf (19),

(25) $\delta = \arcsin(\sin\varepsilon \cdot \sin\Lambda)$

unter Berücksichtigung von (21) und (15).

Zielgrößen

Aus (5) ergeben sich direkt die beiden Bestimmungsgleichungen der Zielgrößen von Schattenwinkelmesser und Spinnensonnenuhr nämlich die gesuchte Wanddeklination

(26) $d = a - \arcsin(\tan h \cdot \tan s)$

und der den Verlauf der Stundenlinien bestimmende Schattenwinkel

(27) $s = \arctan\left(\frac{\sin(a-d)}{\tan h}\right)$.

Rechenschema

Abb. 2 fasst die Abfolge der einzelnen Rechenschritte für den Schattenwinkelmesser (SWM) und die vertikale Spinnensonnenuhr (VSS) in einem Flussdiagramm übersichtlich zusammen, wobei Pfeile die Ein- und Ausgänge der Formeln markieren. Die in der Mitte befindlichen abgeleiteten Größen werden gleichermaßen für

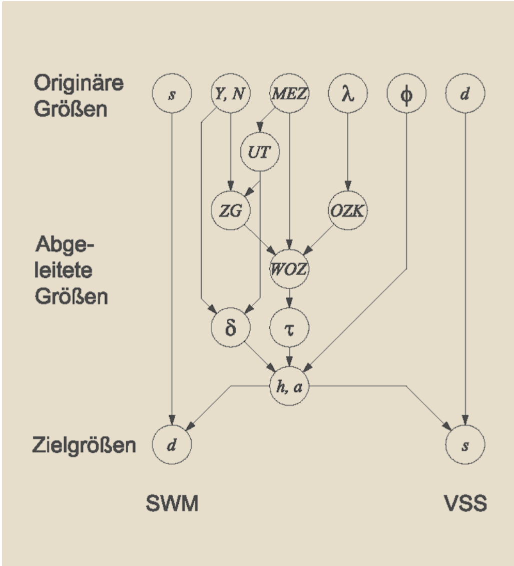

Abb. 2 Flussdiagramm für das Berechnen von Schattenwinkelmesser (SWM) und vertikaler Spinnensonnenuhr (VSS).

beide Instrumente in Anspruch genommen. Schattenwinkel *s* und Wanddeklination *d* treten – wie ersichtlich – einerseits als originäre Größen und andererseits als Zielgrößen auf. Abb. 3 zeigt in tabellarischer Form die Aufeinanderfolge aller benötigten Formeln.

Gnomondimensionierung

Aus den rechtwinkligen Dreiecken IHE, IEJ und JED von Abb. 1 liest man ab

(28) $\cos(a-d) = \frac{IJ}{EJ} = \frac{HD}{EJ} = \frac{O}{EJ}$,

(29) $\cos h = \frac{EJ}{DE}$,

(30) $\sin h = \frac{DJ}{DE} = \frac{HI}{DE}$,

(31) $\cos s = \frac{HI}{HE} = \frac{HI}{U}$.

Gleichsetzen der nach *EJ* umgeformten Gleichungen (28) und (29) ergibt den Abstand zwischen Gnomonspitze und Schattenspitze zu

(32) $DE = \frac{O}{\cos(a-d) \cdot \cos h}$.

	Schattenwinkelmesser	Vertikale Südspinne für WOZ
Originäre Größen		
Schattenwinkel	s	
Wanddeklination		d
Gregorianische Jahres- und Tageszahl	Y, N	
Mitteleuropäische (Sommer-)Zeit	$MEZ\ (MESZ)$	
Geografische Breite und Länge	ϕ, λ	
Abgeleitete zeitabgängige Größen		
Weltzeit	$UT = MEZ - 1\,h = MESZ - 2\,h$	
Zwischengröße	$A = FLOOR((Y-1)/100)$	
Julianische Tageszahl Januar 0.0 für Y	$JD0 = FLOOR(365,25 \cdot (Y-1)) - A + FLOOR(A/4) + 1721424,5$	
Julianische Tageszahl	$JD = JD0 + N + UT/24$	
Anzahl der Jahrhunderte ab J2000.0	$T = (JD - 2451545,0)/36525$	
Mittlere Länge	$L = MOD(280,46 + 36000,770 \cdot T, 360)$	
Mittlere Anomalie	$G = MOD(357,528 + 35999,050 \cdot T, 360)$	
Ekliptikale Länge	$\Lambda = L + 1,915 \cdot \sin G + 0,020 \cdot \sin 2G$	
Schiefe der Ekliptik	$\varepsilon = 23,4393 - 0,01300 \cdot T$	
Anomalistische Zeitgleichungskomponente	$ZG_a = 4 \cdot (-1,915 \cdot \sin G - 0,020 \cdot \sin 2G)$	
Tropische Zeitgleichungskomponente	$ZG_t = 4 \cdot (2,466 \cdot \sin 2\Lambda - 0,053 \cdot \sin 4\Lambda)$	
Zeitgleichung in Minuten	$ZG = ZG_a + ZG_t$	
Ortszeitkorrektur in Stunden	$OZK = (15 - \lambda) \cdot 4/60$	
Wahre Ortszeit in Stunden	$WOZ = MEZ - OZK + ZG$	
Sonnenkoordinaten		
Deklination	$\delta = \arcsin(\sin \varepsilon \cdot \sin \Lambda)$	
Stundenwinkel in Grad	$\tau = (WOZ - 12) \cdot 15$	
Höhe	$h = \arcsin(\sin \phi \cdot \sin \delta + \cos \phi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau)$	
Azimut	$a = \arctan(\sin \tau / (\sin \phi \cdot \cos \tau - \cos \phi \cdot \tan \delta))$	
Zielgrößen		
Schattenwinkel		$s = \arctan(\sin(a-d)/\tan h)$
Wanddeklination	$d = a - \arcsin(\tan h \cdot \tan s)$	

Abb. 3 Rechenprozedur für Schattenwinkelmesser und vertikale Süd-Spinnensonnenuhr im Detail.

Eine zu (32) gleichwertige Relation bekommt man durch Umformen von (30) und (31) nach HI und Gleichsetzen

$$(33)\ DE = \frac{U \cdot \cos s}{\sin h}.$$

Aus (32) gleich (33) folgt schließlich die Schattenlänge

$$(34)\ U = O \cdot \frac{\tan h}{\cos(a-d) \cdot \cos s}.$$

Länge und Durchmesser des Gnomons müssen so ausgelegt sein, dass sich die Schattenspitze mit genügend ausgeprägtem Kernschatten stets innerhalb des Skalenbereichs befindet. Das gilt unter allen sinnvollen Konstellationen von Sonnenhöhe-, Sonnenazimut- und Wanddeklinationswerten sowohl für den Schattenwinkelmesser als auch für die Spinnensonnenuhr. Zum Überprüfen, ob die gewählten Gnomonabmessungen diesen Bedingungen gerecht werden, dienen hinsichtlich der Schattenlänge die Gleichung (34) und für die Breite des Gnomon-

schattens unter Beachtung von (32) die Beziehung [3]
(35) $B_K = B_S - 0{,}0093084 \cdot DE.$

Beispiel für einen Schattenwinkelmesser

Einen Schattenwinkelmesser in metallischer Ausführung – Aluminium mit schwarz ausgelegter Gravur – zeigt Abb. 4: die Abmessungen sind 280 mm x 170 mm x 6 mm, der Skalenradius beträgt 120 mm, der Gnomon hat eine Länge von 200 mm und einen Durchmesser von 3 mm. Die vier Rändelschrauben dienen dem Ausgleich von Wandunebenheiten, so dass der Schattenwinkelmesser ohne zu wackeln an die auszumessende Wand angelegt werden kann. In Verbindung mit einer Wasserwaage läßt sich so der Schattenwinkelmesser exakt horizontal und vertikal ausrichten. Die Wasserwaage mit fest eingegossener Libelle und gefräster Messfläche sollte eine Messgenauigkeit von 0,5 mm / 1 m (entspricht einem Winkel von rund 0,029°) haben.

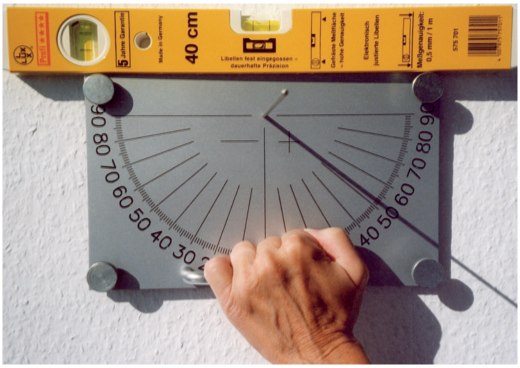

Abb. 4 Der Griff am Schattenwinkelmesser erleichtert die Handhabung beim vertikalen und horizontalen Ausrichten mit Hilfe der vier Rändelschrauben und der Wasserwaage.

Nach dem sorgfältigen Justieren müssen ebenso gewissenhaft der Schattenwinkel und der dazugehörige Zeitpunkt – zweckmäßigerweise an einer Funkuhr – abgelesen werden. Um beste Messergebnisse zu erzielen ist es sinnvoll, den Messvorgang an anderen Wandstellen und zu weiteren Zeitpunkten zu wiederholen, d. h. die berechneten Wanddeklinationswerte zu mitteln.

Beispiel für eine vertikale Süd-Spinnensonnenuhr

Um vom Schattenwinkel gemäß Gleichung (27) auf die Wahre Ortszeit schließen zu können, werden auf dem Zifferblatt einer Spinnensonnenuhr zusätzlich zu den Stundenlinien Linien benötigt, denen Deklinationswerte, d. h. ein Datum zugeordnet werden kann. Diese Aufgabe übernehmen beispielsweise sieben zum Gnomonfußpunkt konzentrische Kreise (Kreisbögen), deren Abstand sich aus den zwölf 30°-Abschnitten des Tierkreises (Ekliptik) ergibt. Sieben mit zutreffendem Datum markierte Kreisbögen genügen, da der Deklinationswertebereich von -23,44° bis +23,44° im Jahr zweimal – einmal aufsteigend und einmal absteigend – durchlaufen wird. Abgelesen wird die momentane WOZ am Schnittpunkt von Gnomonschatten, aktuellem Datumskreis und Stundenlinie, wobei Zwischenwerte jeweils zu interpolieren sind.

Verkörpert der innere Kreisbogen mit dem Radius R_W das Wintersolstitium und der äußere Kreisbogen mit dem Radius R_S das Sommersolstitium, so gilt für den Radius eines dazwischen liegenden Kreisbogens in erster Näherung

$$(36)\ R = R_W + \frac{R_S - R_W}{182} \cdot F, \quad 0 \le F \le 182,$$

wobei der Abstand zwischen Kreisbögen, die sich an der Tierkreiseinteilung orientieren,

$$(37)\ \Delta R = \frac{R_S - R_W}{6}$$

beträgt.

Die Koordinaten der Stundenlinien lauten mit (27) und (36)

(38) $x = R \cdot \sin s.$
(39) $y = -R \cdot \cos s.$

Beim Berechnen der abgeleiteten zeitlichen Größen ist zu beachten, dass zwischen den Zählvariablen N in (10) und F in (36) folgender Zusammenhang besteht

(40) $F = N + 9.$

Abb. 5 zeigt im Prinzip zwei vertikale Süd-Spinnensonnenuhren auf einem Zifferblatt für

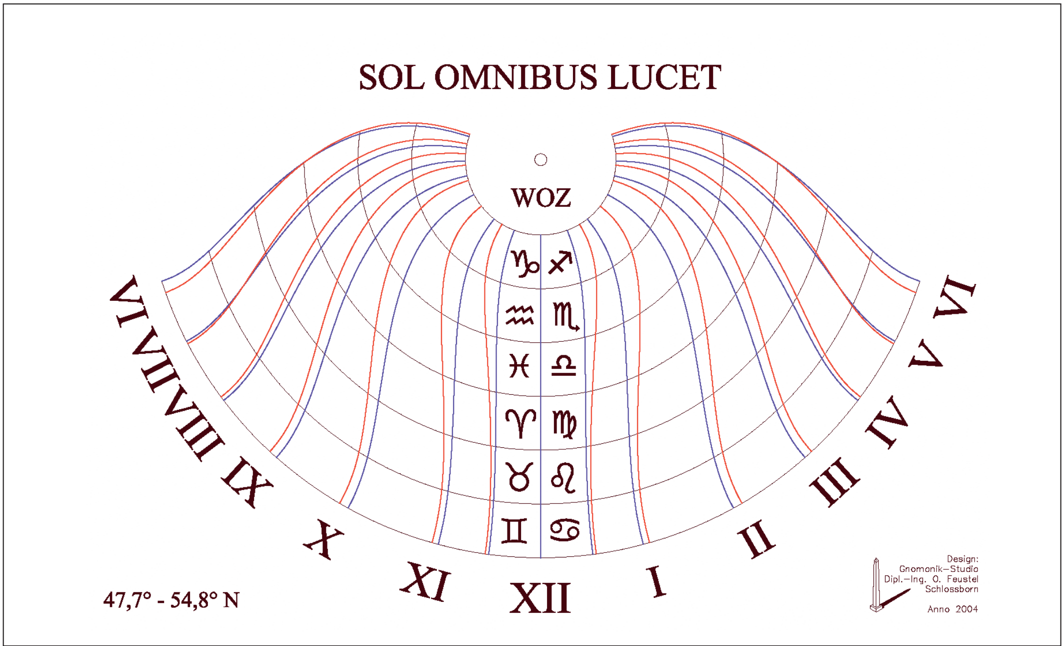

Abb. 5 Zifferblatt einer vertikalen Süd-Spinnensonnenuhr für den Breitenbereich von Deutschland mit Anzeige der Wahren Ortszeit in Abhängigkeit vom Datum. Die vor-und nachmittäglichen Stundenlinien verlaufen paarweise symmetrisch zur Mittagslinie. Betrachtet man die Schnittpunkte aller Stundenlinien mit dem Kreisbogen für die Wintersonnenwende, so gehören die jeweils näher an der 12-Uhr-Linie gelegenen Stundenlinien zur südlichen Breite und die weiter entfernten Stundenlinien zur nördlichen Breite.

den Breitenbereich von Deutschland: der eine Satz Stundenlinien gilt exakt für $\phi = 47{,}7°$ (z. B. Konstanz) und der andere für $\phi = 54{,}8°$ (z. B. Flensburg). So kann mit dieser ungewohnten „Doppelspinne" ein immer wiederkehrendes Berechnen und Entwerfen des Zifferblatts vermieden werden; außerdem verträgt sie einen Ortswechsel, ohne falsch zu gehen. Beim Ablesen der WOZ braucht nur innerhalb der zu den Grenzbreitengraden gehörenden Stundenlinienpaare interpoliert zu werden.

Literatur

[1] B. D. YALLOP, C.Y. Hohenkerk: Astronomical Phenomena. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, edited by P. Kennet Seidelmann. University Science Books, Sausalito, CA, 1992.

[2] J. MEEUS: Astronomical Algorithms – 2nd edition. Willmann-Bell, Inc., Richmond, Virginia, 2000.

[3] O. FEUSTEL: Berechnung der Polos-Sonnenuhr in allgemeiner räumlicher Lage anhand von zwei sphärischen Dreiecken aus vier Großkreisen.
DGC Jahresschrift 2004, Band 43, Seiten 209 bis 225.