Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen Ellipse und Kreis

(s. https://www.helios-sonnenuhren.de/de/blog/2025/01/sonnenuhren)

Der Zusammenhang zwischen Kreis und Ellipse ist ein rein geometrischer. Man kann diesen wie folgt beschreiben: https://www.helios-sonnenuhren.de/de/blog/2025/01/sonnenuhren

Durch schiefe orthogonale Projektion eines Kreises, der in vom Mittelpunkt ausgehenende Sektoren unterteilt ist, entsteht eine Ellipse, die ebenfalls in auch in vom Mittelpunkt ausgehenende Sektoren unterteilt ist.

Die Ellipse samt Sektorengrenzen entsteht auch als Schnittbild beim schrägen Schneiden eines Hohlzylinders (Zylinder als Spezialform des Kegels), in dem sich ein Büschel befindet, das aus sich in seiner Achse schneidenden dünnen Quadern (Blechen) besteht.

Beobachtungen in der Physik zeigen oft geometrische Zusammenhänge, sind aber für deren Erklärung nicht erforderlich, sind angewendete Mathematik. Die elliptische Bahnebene als allgemeiner Fall einer Kreisfläche mit von einem Brennpunkt ausgehenden zeitproportionalen Teilflächen ist geometrisch etwas anderes und scheidet für eine solche Erklärung prinzipiell aus. Die Zeitabhängigkeit des Sonnenuhren-Polstab-Schattens wird zwar zur Zeitmessung benutzt, auf sie müsste aber garnicht bezogen werden. Das Sonnenuhren-Zifferblatt selbst ist zeitlos, so wie es Geometrie an sich und hier der zu untersuchende geometrische Zusammenhang ist.

Die im Helios-Blog vorgestellte mathematische Behandlung der Frage, ob die Sektoren auf der Ellipse, die von einem in gleiche Sektoren unterteilten Kreis abgeleitet ist, auch untereinander gleiche große Flächen sind, hat diesen statischen Hintergrund. Sie geht von puren Stundenwinkeln aus, auch wenn Stunde einen Bezug auf Änderung der Zeit hat. Und sie beantwortet die gestellte Frage mit ja, was garnicht überraschend ist. Warum?

Der Kreis ist ein Sonderfall des allgemeinen Falls Ellipse. Dass bei ihm gilt, was für die Ellipse gilt, ist naheliegend, das Umgekehrte ebenso.

Ich habe dennoch ein paar einfache Kontrollrechnungen /-konstruktionen gemacht:
Einfach auch deswegen, weil die ausgewählten Sektoren schmal sind und somit in guter Näherung als schmale Dreiecke leichter zu berechen sind. Deren Flächen $A = \Delta\alpha * r^2 / 2$ sind untereinander gleich. Die entsprechenden Kreis-Flächen (Kreis als Ellipsen-Innenkreis) sind bei einer vertikalen Sonnenuhr mit dem Faktor $1 / \cos\varphi$ kleiner (φ = geograf. Breitenwinkel).

1. 18 Uhr: Die Dreieckskatheten r ändern sich nicht.
   Die $\Delta\alpha$ als Bogen im Einheitskreis näherungsweise ersetzende Grundseite c wird mit dem Faktor $1 / \cos\varphi$ größer. $\Delta\alpha$ wächst im gleichen Maß und somit auch A_{Ell}.
   Z.B.: $\varphi = 45°$: $A_{Ell} = \sqrt{2} * A_{Kreis}$.
2. 12 Uhr: Die Dreieckskatheten r werden mit dem Faktor $1 / \cos\varphi$ größer.
   Die Grundseite c ändert sich nicht. Der $\Delta\alpha$-Bogen auf dem Einheitskreis wird aber wegen
   $r = 1 / \cos\varphi > 1$ mit dem Faktor $\cos\varphi$ kleiner. Wegen r^2 ist A_E dennoch mit dem Faktor $1 / \cos\varphi$ größer als A_K. Z.B.: $\varphi = 45°$: $A_E = \sqrt{2} * A_K$.
   Die beiden Sektoren A_E sind gleich groß. Dennoch sei eine dritte, weniger besondere Stelle unteersucht:
3. 15 Uhr: $\tau = \alpha = 45°$; s. angehängte Zeichnung.
   Hier ändern sich sowohl die Dreieckkatheten als auch die Grundseite.
   Die Katheten-Enden liegen mit dem Faktor $1/\cos\varphi$ tiefer und die Katheden sind länger: $r = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225$ (z. B. mit bisherigem $\varphi = 45°$).
   Die Grundseite c wächst mit demselben Faktor auf c‘ = 1,225, liegt aber nicht mehr symmetrisch zwischen den Katheten.
   Die symmetrische Lage und der etwas kleinere Wert c“ = 1,155 sind nach einer Drehung (19,5°) im Gegenuhrzeigersinn erreicht.
   Der $\Delta\alpha$-Bogen auf dem Einheitskreis wird aber wegen r=1,225 >1 mit dem Faktor 1/1,225 kleiner:
   $\Delta\alpha = 0{,}943$.
   $A_E = \Delta\alpha \cdot r^2 = 0{,}943 \cdot 1{,}5 = \sqrt{2}$.

Resume: An allen drei Orten der Ellipse sind die Flächen der Sektoren wie die zugehörenden Kreissektoren untereinander gleich groß.

Anmerkung: Die Werte der drei Fälle, mit aufsteigendem α geordnet.

(Stunde)	(12:00)	(15:00)	(18:00)	
$(\tau=)\ \alpha$	0°	45°	90°	
r_E/r_K	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1{,}5}$	1	quadratisch fallend
$\Delta\alpha_E/\Delta\alpha_K$	$\sqrt{2}/2$	0,943	$\sqrt{2}$	etwa quadr. steigend

Anmerkung zur Grafik: auch $c_K = 1$ ist wie $r_K = 1$ und $\Delta\alpha_K = 1$ kein absoluter Wert sondern eine für die Normierung verwende Zahl.